BERYL

OPTICS vs press.

POCKELS

JSL
RTLO13069
POCKELS
1968
JUNK
#1.60

Separat-Abdruck aus dem Neuen Jahrbuch für Mineralogie etc. Beilageband VIII.

Neues Jb. f. Min. Geol. 1893, Beilageb. bd. 8, p. 217-268

Ueber die Aenderung des optischen Verhaltens von Alaun und Beryll durch einseitigen Druck.

Von

Fr. Pockels in Göttingen.

(Hierzu Taf. VI und 1 Holzsch[illegible]ere)

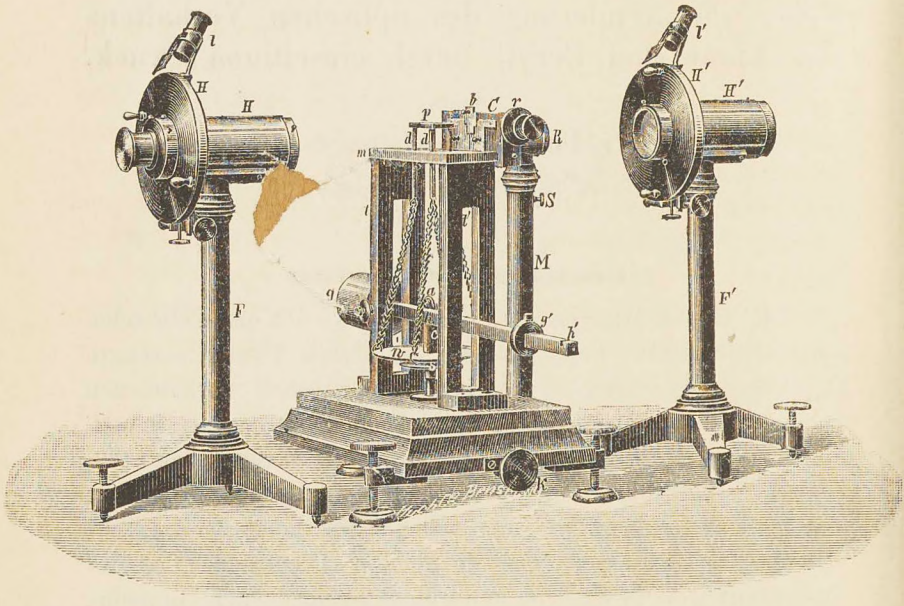
I. Beschreibung des Apparates.

Die Beobachtungen, deren Ergebnisse ich im Folgenden mittheilen werde, betreffen nur die durch Druck erzeugte Doppelbrechung oder die Änderung der schon vorhandenen Doppelbrechung, nicht die absoluten Änderungen der Brechungsindices, und wurden demgemäss mit dem BABINET'schen Compensator ausgeführt. Da aber die Anordnung des Apparates, den ich diesmal benutzte, und welcher für das mineralogische Institut in Göttingen vom Mechaniker DIEDERICHS daselbst hergestellt worden ist, von der früher beschriebenen[1] in mehrfacher Hinsicht abweicht, so scheint es mir nicht überflüssig, eine Beschreibung desselben vorauszuschicken.

Was zunächst den Apparat zur Erzeugung des einseitigen Druckes betrifft, so ist an Stelle des einfachen einarmigen Hebels eine Vorrichtung getreten, welche gestattet, auf den Querschnitt des vertical stehenden (rechtwinkeligen) Krystallprismas einen gleichmässig vertheilten verticalen Druck auszuüben. Auf einem starken, auf drei Stellschrauben ruhenden Brette sind zwei verticale, 20 cm hohe eiserne Träger (t, t' in der umstehenden, nach einer Photographie angefertigten Figur)

[1] F. POCKELS, Ann. d. Phys. N. F. 37. 164—168. 1889.

verschraubt, welche in der Mitte eine rechteckige Durchbrechung besitzen und oben eine horizontale Messingplatte m tragen, auf welche das zu comprimirende Stäbchen zu stehen kommt. Durch vier, in den Ecken eines Rechtecksvon 1,8 und 2,8 cm Seitenlänge angebrachte Durchbohrungen dieser Messingplatte gleiten vier Messingstäbe d, die oben durch eine kleinere Messingplatte p von 4 mm Dicke verbunden sind, während sie an ihren unteren Enden vermittelst Ketten eine Waagschale w tragen. Eine mittelst des Knopfes k drehbare, unter dem Brette



angebrachte Arretirungsvorrichtung gestattet, die Waagschale durch Hebung der kleineren Schale s zu unterstützen. Zur Belastung der Schale waren vier Bleiplatten von je $\frac{1}{2}$ kg Gewicht hergestellt worden. Um aber noch grössere Belastungen erzielen zu können, ist in dem Schlitz des Trägers t um zwei Spitzen (bei a) drehbar ein Stahlhebel h angebracht, dessen Ende h' aus dem Schlitz des anderen Trägers herausragt, und welcher durch das Gegengewicht g und die verschiebbare Scheibe g' für sich ins Gleichgewicht gebracht werden konnte. An diesem Hebel ist bei h ein Messingcylinder c so befestigt, dass er sich um eine zur Drehungs-

axe des Hebels parallele Axe drehen kann und mit seiner unteren Fläche auf die Mitte der Waagschale zu stehen kommt, wenn der Hebel annähernd horizontal steht. (Falls in Folge verschiedener Höhe der Krystallstäbchen der Hebel sich nicht genügend horizontal einstellte, wurde auf die Mitte der Waagschale noch ein geeignetes Metallplättchen gelegt.) Wird also an das mit einem Einschnitt versehene Hebelende h' ein Gewicht Q angehängt, so wird auf die Waagschale der verticale Druck $P = \nu Q$ ausgeübt, wo ν das Verhältniss der Hebelarme ah' und ah ist (im vorliegenden Falle $= 4\frac{2}{3}$). Bei grösseren Belastungen mittelst des Hebels wurde nicht die Arretirungsvorrichtung benutzt, sondern das Gewicht selbst an- und abgehängt. — Das zu comprimirende Prisma oder Stäbchen wird auf m möglichst unter der Mitte von p so aufgestellt, dass eines seiner verticalen Flächenpaare senkrecht zur Beobachtungsrichtung steht, welche letztere horizontal und senkrecht zur Richtung des Hebels ist. Um kleine Unebenheiten der Endflächen des Prisma oder der Messingplatten m und p auszugleichen und den Druck möglichst gleichförmig auf den Querschnitt zu vertheilen, werden zwischen die Endflächen des Prismas und die Platten m und p kleine Platten von Gummi oder bei grösseren Belastungen von Blei gelegt. Trotzdem war auch mit diesem neuen Druckapparat niemals eine ganz gleichförmige Compression zu erzielen; indessen hat er doch vor dem früher von mir benutzten unter anderen den Vortheil, dass die Aufstellung des Prismas erheblich bequemer auszuführen ist.

Der Compensator (C) war derselbe, dessen ich mich früher bedient habe, er war aber in anderer Weise aufgestellt. Eine Messingsäule M, welche an das schon erwähnte Brett angeschraubt wird, ist am oberen Ende mit einer Bohrung versehen, in welche ein cylindrischer Zapfen hineinpasst, der durch die Schraube S festgeklemmt werden kann. Letzterer ist fest verbunden mit einem cylindrischen Messingrohr mit horizontaler Axe (in der Figur sichtbar bei R), in welches ein ebensolches, an den Compensator angeschraubtes Rohr hineinpasst, so dass also der Compensator um eine horizontale, mit der Beobachtungsrichtung zusammenfallende Axe gedreht werden kann, was für solche Fälle von Wichtigkeit

ist, wo die Schwingungsrichtungen im comprimirten Prisma nicht horizontal und vertical sind[1]; die Grösse dieser Drehung kann an einem in je 5^0 getheilten Kreise bis auf 1^0 bestimmt werden. Der Compensator selbst war ein solcher der gewöhnlichen Babinet'schen Construction, bei welcher einer der im homogenen polarisirten Lichte zwischen gekreuzten Nicols sichtbaren schwarzen Interferenzstreifen durch Drehung einer Mikrometerschraube r auf die Mitte eines von den Rändern zweier horizontal verschiebbarer schwarzer Bleche (die auch in der Figur erkennbar sind) gebildeten schmalen verticalen Spaltes eingestellt wird. Da die schwarzen Interferenzstreifen nicht genau parallel den Spalträndern waren und oft auch in Folge von Ungleichmässigkeiten des Krystalls verzerrt erschienen, so waren vor den eben erwähnten Blechen noch zwei andere, vertical verschiebbare, von denen eines bei b sichtbar ist, angebracht, so dass also eine engbegrenzte Stelle des Krystalls behufs Messung der Verzögerung fixirt werden konnte. Es sei noch erwähnt, dass dem Gangunterschiede von 1 Wellenlänge des Natriumlichtes 23,809 Umdrehungen der Mikrometerschraube entsprachen und die Trommel (r) der letzteren in 100 Theile getheilt war. Die Ablesung der Trommelstellung konnte mit Hilfe eines Spiegels vom Sitze des Beobachters aus vorgenommen werden.

Die Nicols, welche zur Anwendung gelangten, sind in cylindrische Messinghülsen in der Weise gefasst, dass sie mit Hülfe zweier kleiner Schrauben und einer Feder justirt werden können. Die Hülsen sind mit grossen Theilkreisen H, H' verbunden, welche in halbe Grade getheilt sind und an welchen man mittelst Nonien durch die Loupen l, l' noch Minuten ablesen kann; die Feineinstellung geschieht mittelst Mikrometerschrauben. Die Fassungen sind drehbar in Messingröhren, welche mittelst cylindrischer Zapfen in die Träger F, F' eingesetzt sind, so dass also die Nicols auch

[1] Bei der früheren Anordnung, wo der Compensator nicht drehbar war, musste ich in solchen Fällen eine senkrecht zur Axe der Isotropie geschnittene Quarzplatte von geeigneter Dicke einschalten, um die Schwingungsrichtungen der aus dem Compensator austretenden Strahlen mit jenen im Krystall zur Coincidenz zu bringen.

um verticale Axen gedreht werden können. Das als Polarisator verwendete Nicol besitzt einen grössten Durchmesser von ca. 3,2 cm, und in seine Fassung ist hinten und vorn eine Linse zur Concentration des hindurchgehenden Lichtes eingesetzt; als Analysator diente ein beträchtlich kleineres Nicol, dessen Hülse vorn durch ein Diaphragma geschlossen war. Bei den Beobachtungen mit dem Compensator wurden die Nicols gekreuzt und so gestellt, dass ihre Schwingungsrichtungen mit denjenigen im Compensator $\pm 45^0$ bildeten. Wie schon früher, wurden die Messungen in der Regel an drei Stellen des Prismas (nahe den Rändern und der Mitte) ausgeführt und aus den dabei gewonnenen Resultaten das arithmetische Mittel genommen.

Die Querdimensionen der Prismen wurden an einer Anzahl symmetrisch vertheilter Punkte mit einem Sphärometer gemessen, und aus diesen Messungen, die übrigens immer nur sehr wenig differirten, wurde ebenfalls das Mittel genommen.

II. Beobachtungen an Alaun.

Historische Bemerkungen. — Durch meine Beobachtungen an Flussspath, Steinsalz und Sylvin[1] hatte sich ergeben, dass die Krystalle des regulären Systems in ihrem optischen Verhalten unter einseitigem Drucke ausserordentliche Verschiedenheiten zeigen. Es schien mir daher von Interesse, diese Untersuchungen an anderen regulären Krystallen fortzusetzen, und hierzu boten sich zunächst die Alaune dar, sowohl wegen ihrer ausgezeichneten Krystallisationsfähigkeit, als auch im Hinblick auf die oft beschriebenen Erscheinungen anomaler Doppelbrechung, welche an ihnen auftreten.

Die durch Druck künstlich erzeugte Doppelbrechung des Alauns (eines etwas Ammoniak enthaltenden Kali-Thonerde-Alauns, der von Natur völlig einfach brechend war) ist bereits von Wertheim[2] untersucht worden, der dabei Erscheinungen beobachtete, für welche er keine Erklärung finden konnte. Er be-

[1] F. Pockels, Ann. d. Phys. N. F. **37**. 372. 1889 u. **39**. 440. 1890; dies. Jahrb. 1890. I. -197- u. 1890. II. -367-.

[2] Wertheim, Compt. rend. XXXIII. 576—579, 1851 u. Ann. d. Phys. **86**. 325—329. 1852.

merkte nämlich, indem er ein rechtwinkliges Parallelepiped successive parallel seinen drei Kantenrichtungen comprimirte und jedesmal parallel den beiden anderen Kantenrichtungen im polarisirten Natriumlichte beobachtete, dass die Schwingungsrichtungen gegen die Druckrichtung unter verschiedenen, von der Grösse des Druckes unabhängigen Winkeln von 7 bis 18° geneigt waren und auch die zur Erzeugung des Gangunterschiedes von $\frac{1}{2}$ Wellenlänge erforderlichen Belastungen pro 1 qmm des Querschnittes je nach der Druck- und Beobachtungsrichtung erheblich (fast im Verhältniss 1 : 2) variirten.

Über die Orientirung des Parallelepipeds gibt Wertheim leider nichts an; nach einer späteren Bemerkung[1] ist es aber wahrscheinlich, dass eines der Flächenpaare parallel einer Oktaëderfläche sein sollte. In diesem Falle würde, wie wir später sehen werden, schon eine geringe Abweichung von der beabsichtigten Orientirung genügen, um die oben angeführten scheinbaren Unregelmässigkeiten zu erklären. Wertheim schliesst aus den letzteren aber[2], „dass die Spannung des Äthers nicht immer der mechanischen Spannung der Moleküle proportional ist“ und „dass die regulären Krystalle nicht als optisch homogene oder isotrope Körper anzusehen sind“.

In einer zweiten Notiz[3] stellt Wertheim seine Beobachtungsresultate über die künstliche Doppelbrechung regulärer Krystalle zusammen, ohne nähere Angaben über die Beobachtungen selbst zu machen. Speciell in Bezug auf den Alaun sagt er: I. „Der Alaun verhält sich nicht wie ein optisch homogener Körper; denn die Kräfte, die einen gegebenen Gangunterschied erzeugen, variiren oft im Verhältniss 1 : 4 je nach der Richtung, in der sie wirken, und dies gilt sowohl bei Stücken, die senkrecht zu den Würfelflächen, als bei solchen, die senkrecht zu den Oktaëderflächen geschnitten

[1] Wertheim, Compt rend. XXXV. 278.

[2] Bei dieser Gelegenheit äussert er auch die irrthümliche Ansicht, dass der Elasticitätscoëfficient der regulären Krystalle von der Richtung unabhängig sei. Die Bezeichnung „nicht homogen“ gebraucht Wertheim offenbar im Sinne von anisotrop, doch auch dann ist seine Ausdrucksweise nicht correct.

[3] Wertheim, Compt. rend. XXXV. 276—278. 1852 u. Ann. d. Phys. 87. 498—500. 1852.

sind[1]. — II. Ferner weichen die optischen Elasticitätsaxen (es sind gemeint die Schwingungsrichtungen) von den mechanischen Axen (d. h. Hauptdruckaxen) ab; diese Abweichung ist von der Grösse des Druckes unabhängig, und ist in den zu den Würfelflächen senkrechten Parallelepipeden nur dann vorhanden, wenn das Licht senkrecht zu den Würfelflächen hindurchgeht, in den zu den Oktaëderflächen senkrechten Parallelepipeden dagegen bei allen 6 Stellungen, doch in verschiedener Grösse. — III. In den zu den Würfelflächen senkrechten Stücken ist die Abweichung um so beträchtlicher, je mehr diese Flächen verzerrt sind, sie ist 0° oder fast 0° in den Krystallen mit quadratischen Würfelflächen, wächst aber in dem Maasse, wie die Flächen gestrecktere Rechtecke werden und ist oft 20—25°, wenn das Seitenverhältniss des Rechtecks etwa 1 : 2 ist.“ — Wertheim schliesst mit der etwas dunklen Bemerkung: „Alle diese Erscheinungen scheinen ihren Ursprung darin zu haben, dass die optische Elasticität gleichsam die Eindrücke der während der Krystallisation wirksam gewesenen Drucke oder Spannungen bewahrt hat.“

Wir werden weiter unten sehen, wie sich alle diese von Wertheim beobachteten scheinbaren Unregelmässigkeiten ungezwungen erklären lassen, abgesehen etwa von der unter III angeführten Beobachtung.

Es sei noch bemerkt, dass Wertheim die Alaunkrystalle Drucken bis zu 1 kg pro qmm ausgesetzt hat, ohne dass bleibende Doppelbrechung entstand; ferner dass er die erwähnten Erscheinungen ebenso beobachtet hat, indem er die Krystalle durch Zug positiv, statt durch Druck negativ doppeltbrechend machte.

Im Übrigen finden sich, soviel mir bekannt, einige Bemerkungen über die durch Druck erzeugte Doppelbrechung des Alauns nur noch in den Arbeiten F. Klocke's[2] über anomale Doppelbrechung regulärer Krystalle und in einer Notiz von Jannettaz[3]. Der Erstere erwähnt, dass der Ammoniak-

[1] Es ist damit wohl gemeint: sowohl bei Parallelepipeden, an denen ein Flächenpaar || 100 ist, als bei solchen, an denen ein Flächenpaar || 111 ist.

[2] F. Klocke, Dies. Jahrb. 1880. I. 51—88 u. 1881. II. 249.

[3] Jannettaz, Bull. soc. min. de France. II. 191. 1879.

Alaun durch einseitigen Druck negative Doppelbrechung, wie Glas, annimmt, aber nach Aufhebung des Druckes keine Spur davon behält, wenn auch der Druck bis nahe zum Zerspringen des Krystalls gesteigert worden war. Jannettaz hat beobachtet, dass Alaunkrystalle, welche sich in einem Siphon mit kohlensaurem Wasser gebildet hatten, doppeltbrechend waren, und schreibt dies dem Druck der Kohlensäure zu; es ist aber klar, dass allseitig gleicher Druck einen regulären Krystall nicht doppeltbrechend machen kann, wenn nicht noch störende Einflüsse vorhanden sind.

Theorie für reguläre Krystalle. — Die Gesetze der durch elastische Deformationen erzeugten Doppelbrechung regulärer Krystalle lassen sich nach der a. a. O. von mir entwickelten und durch Beobachtungen an Flussspath, Steinsalz und Sylvin bestätigten Theorie in folgender Weise mit Hilfe von zwei der Substanz eigenthümlichen (und eventuell von der Wellenlänge abhängigen) Constanten a, b darstellen.

Das Fresnel'sche Ovaloid (das ist die inverse Fläche des Indexellipsoids oder „Elasticitätsellipsoids") des doppeltbrechend gewordenen Krystalls, bezogen auf die krystallographischen Axen (d. h. die Würfelnormalen) X^0, Y^0, Z^0, habe die Gleichung:

$$\varrho^2 = B_{11}\mu^{0^2} + B_{22}\nu^{0^2} + B_{33}\pi^{0^2} + 2B_{23}\nu^0\pi^0 + 2B_{31}\pi^0\mu^0 + 2B_{12}\mu^0\nu^0,$$

wo ϱ der durch die Richtungscosinus μ^0, ν^0, π^0 bestimmte Radius-Vector ist. Ferner seien X_x, Y_y Z_z, Y_z, Z_x, X_y die elastischen Spannungscomponenten, welche man in dem hier in Betracht kommenden Falle homogener Deformationen ohne Kenntniss der Elasticitätsconstanten aus den gegebenen äusseren Kräften, die auf die Oberfläche des Krystalls wirken, bestimmen kann, und endlich sei ω^0 die Lichtgeschwindigkeit im undeformirten Krystall. Dann sind die das Ovaloid bestimmenden Grössen B_{hk} gegeben durch die Ausdrücke:

1)
$$\begin{aligned}
B_{11} &= \omega^{0^2} - a X_x - c(X_x + Y_y + Z_z),\\
B_{22} &= \omega^{0^2} - a Y_y - c(X_x + Y_y + Z_z),\\
B_{33} &= \omega^{0^2} - a Z_z - c(X_x + Y_y + Z_z),\\
B_{23} &= -b Y_z,\\
B_{31} &= -b Z_x,\\
B_{12} &= -b X_y.
\end{aligned}$$

Die dritte hierin auftretende Constante c kommt bei den Erscheinungen der Doppelbrechung nicht in Betracht, weil dieselben lediglich von den Differenzen der Grössen B_{hh} und von den B_{hk} abhängen.

Bei den im Folgenden zu besprechenden Beobachtungen handelt es sich um die Doppelbrechung von rechtwinkligen Parallelepipeden (oder Prismen, wie wir fortan der Kürze wegen sagen wollen), an denen ein seitliches Flächenpaar entweder einer Würfel- oder einer Dodekaëderfläche parallel ist.

Im ersten Falle liegt die Druckrichtung, d. i. die Längsrichtung des Prismas in einer Coordinatenebene, welche zur X^0Y^0-Ebene gewählt werde, und bildet mit der X^0-Axe einen gegebenen Winkel φ; im zweiten Falle liegt sie etwa in der Halbirungsebene des rechten Winkels zwischen Z^0X^0 und Z^0Y^0 und bildet einen gegebenen Winkel χ mit der Z^0-Axe. Die Formeln für diese beiden Fälle habe ich früher entwickelt[1], ich gebe daher hier nur die Resultate an.

Im ersten Falle fällt eine optische Symmetrieaxe Z immer in die Z^0-Axe, die beiden anderen X und Y bilden mit der X^0- bezw. Y^0-Axe den Winkel:

$$2) \qquad \psi = \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi\right);$$

$\psi - \varphi$ ist also die Auslöschungsschiefe des comprimirten Prismas auf dem der Würfelfläche parallelen Flächenpaar. Die Differenzen der Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten ω_x, ω_y, ω_z sind für den in der durch φ bestimmten Richtung wirkenden Druck p:

$$3) \quad \begin{aligned} \omega_y^2 - \omega_x^2 &= p\sqrt{a^2\cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi}, \\ \omega_y^2 - \omega_z^2 &= -\tfrac{1}{2} p \left\{a - \sqrt{a^2\cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi}\right\}, \\ \omega_x^2 - \omega_z^2 &= -\tfrac{1}{2} p \left\{a + \sqrt{a^2\cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi}\right\}. \end{aligned}$$

Für die Richtung senkrecht zu dem einen Flächenpaar des Prismas (nämlich die Z^0- oder Z-Axe) gelten direct die Geschwindigkeiten ω_y, ω_x. Die Geschwindigkeiten der beiden Wellen, welche sich parallel der zweiten Beobachtungsrichtung, d. h. senkrecht zur Druckrichtung und zur Z-Axe fortpflanzen, sind gegeben durch:

[1] F. Pockels, Ann. d. Phys. N. F. **39**. 445—447; dies. Jahrb. 1890. II. -367—370-.

$$3') \qquad \omega_1^2 = \omega_z^2,$$
$$\omega_2^2 = \omega_x^2 \cos^2(\varphi - \psi) + \omega_y^2 \sin^2(\varphi - \psi),$$

und zwar gilt ω_1 für die parallel zur Druckrichtung, ω_2 für die senkrecht dazu polarisirte Welle.

Sind nun ω_1 und ω_2 die Geschwindigkeiten der Wellen, deren Polarisationsebenen parallel und senkrecht zur Richtung der Streifen im Compensator sind, beim Drucke p, und bezeichnet n den ursprünglichen Brechungsindex des Krystalls, D seine Dicke in der Beobachtungsrichtung, λ die Wellenlänge des Natriumlichts und v die Lichtgeschwindigkeit in Luft, so ist die durch den Druck p pro qmm hervorgebrachte relative Verzögerung der beiden Wellen in Theilen von λ, oder die beobachtete Verschiebung eines Compensatorstreifens δ dividirt durch den Abstand zweier benachbarter Streifen d, gegeben durch[1]

$$\Delta = \frac{\delta}{d} = \frac{D n^3}{2\lambda} \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{v^2},$$

oder wenn man noch die Breite des Prismas B, die Belastung des Hebelendes Q und das Verhältniss der Hebelarme ν einführt,

$$\Delta = \frac{n^3 \nu Q}{2\lambda B} \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{p v^2},$$

folglich:

$$4) \qquad C = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{p v^2} = \frac{2\lambda B}{n^3 \nu Q} \Delta.$$

Die hieraus zu berechnenden Grössen C sind nun gewisse Combinationen der Constanten $\frac{a}{v^2}$ und $\frac{b}{v^2}$, welche sich auf Grund der Formeln 3) und 3') sofort bilden lassen.

Im zweiten Falle, wo die Druckrichtung einer Dodekaëderfläche parallel ist, muss eine optische Symmetrieaxe (die X-Axe) die Normale dieser Ebene sein, während die beiden anderen in der letzteren liegen; von ihnen bilde die Z-Axe mit der Z^0-Axe den Winkel ϑ, in demselben Sinne positiv gerechnet, wie χ. Der Winkel ϑ bestimmt sich dann durch die Gleichung:

$$5) \qquad \operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{4 b \sin 2\chi}{a - b + (3a + b)\cos 2\chi};$$

[1] F. Pockels, l. c. 37. 167.

$\vartheta - \chi$ ist die Auslöschungsschiefe auf den Dodekaëderflächen des gepressten Prismas, d. h. der Winkel zwischen der Schwingungsrichtung der einen diesen Flächen parallelen Welle und der Druckrichtung.

Für die Differenzen der Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten findet man:

$$\omega_y^2 - \omega_z^2 = p\,b\,\frac{\sin 2\chi}{\sin 2\vartheta},$$

6) $$\omega_x^2 - \omega_z^2 = p\,b\,\frac{\sin \chi}{\sin \vartheta}\cos(\chi - \vartheta),$$

$$\omega_y^2 - \omega_x^2 = p\,b\,\frac{\sin \chi}{\cos \vartheta}\sin(\vartheta - \chi).$$

Die beim Beobachten senkrecht zu dem der Dodekaëderfläche parallelen Flächenpaar mit dem Compensator messbare Grösse C ist $\frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{p\,v^2} = \frac{b}{v^2}\frac{\sin 2\chi}{\sin 2\vartheta}$. Die Geschwindigkeiten senkrecht zum anderen Seitenflächenpaar, auf welchem die Auslöschungsrichtungen parallel den Kanten sind, ergeben sich wie folgt:

$$\omega_1 = \omega_x,$$
$$\omega_2^2 = \omega_z^2\cos^2(\vartheta - \chi) + \omega_y^2\sin^2(\vartheta - \chi).$$

Hieraus ist die betreffende Constantencombination C in jedem speciellen gegebenen Falle leicht abzuleiten.

Beobachtungen an Kalialaun. — Aus einem in der Sammlung des mineralogischen Instituts befindlichen grossen Krystall der Combination (111), (100), (110) [mit vorherrschendem Oktaëder] von Kalialaun, welcher Spuren von Ammoniak enthielt, liess ich durch Herrn Brünné in Göttingen zunächst zwei Prismen (d. h. rechtwinklige Parallelepipeda) schneiden, welche gleiche krystallographische Orientirung, aber verschiedene Dimensionsverhältnisse besassen und aus verhältnissmässig entfernten Stellen des Krystalls geschnitten waren. Bei dem kleineren, No. I, waren die längsten Kanten (von der Länge L_1 = ca. 15 mm) parallel einer Dodekaëdernormale, indem zwei von ihnen nahezu in einer 100-Fläche des Krystalls parallel zu deren Combinationskanten mit (111) gelegen waren; die mittleren Kanten von der Länge $L_2 = 9{,}4$ mm lagen parallel den anderen Combinationskanten jener Würfel-

fläche, und die kürzesten Prismenkanten ($L_3 = 5{,}98$ mm) waren somit senkrecht zur letzteren. Das grössere Prisma, No. I′, war aus der Nachbarschaft einer der schmalen Dodekaëderflächen des Krystalls entnommen; seine längsten Kanten (L_1 = ca. 20 mm) lagen parallel der durch diese Fläche abgestumpften Oktaëderkante, die mittleren ($L_2 = 10{,}1$ mm) ebenfalls parallel der betreffenden Dodekaëderfläche (also || einer Würfelnormale), und die kürzesten ($L_3 = 5{,}93$ mm) senkrecht zu dieser Fläche. Abgesehen von einer Ecke des Prismas I′ erwiesen sich beide Prismen als vollkommen einfach brechend. Die Druckrichtung war bei beiden die Richtung der langen Kanten, also eine Dodekaëdernormale, so dass die Formeln 2) und 3) mit dem speciellen Werthe $\varphi = 45^0$ anzuwenden sind. Nach 2) wird dann $\psi = 45^0$, $\psi - \varphi = 0$, es liegen also auf beiden Flächenpaaren die Auslöschungsrichtungen parallel und senkrecht zur Druckrichtung, und der Compensator konnte in seiner normalen Stellung (welche er in der Abbildung S. 218 besitzt) belassen werden. Nach 3) wird:

$$\omega_y^2 - \omega_x^2 = p\,b, \quad \omega_z^2 - \omega_x^2 = p\,\frac{a+b}{2},$$

und nach 3′) ist letztere Grösse identisch mit der Differenz $\omega_1^2 - \omega_2^2$, welche für die zur Dodekaëderfläche parallele Beobachtungsrichtung gilt. Die aus den Compensatorbeobachtungen nach Gleichung 4) zu berechnenden Grössen C haben also folgende Bedeutung:

Prisma I, breiteres Flächenpaar (100) : $C_1 = \dfrac{-b}{v^2}$.

„ I, schmäleres „ (110) : $C_2 = -\dfrac{a+b}{2v^2}$.

„ I′, „ „ (100) : $C_1' = \dfrac{-b}{v^2}$.

„ I′, breiteres „ (110) : $C_2' = -\dfrac{a+b}{2v^2}$.

Das Prisma I′ wurde später in zwei neue zerschnitten, deren eines, welches als No. II bezeichnet werden soll, zur Längsrichtung die Richtung der mittleren Kanten von I′, also eine Würfelnormale hatte, während die anderen Kanten, welche 5,28 bezw. 5,01 mm lang waren, parallel den längsten und kürzesten Kanten von I′, somit Dodekaëdernormalen waren. Das zweite jener Prismen, welches wir No. III nennen wollen,

besass eine Längsrichtung, welche parallel den breiten Seitenflächen von I′, aber gegen deren Begrenzungslinien geneigt lag; der Neigungswinkel sollte ungefähr 45° betragen, war aber nicht mehr genau festzustellen und musste daher als unbekannt in die Rechnung eingeführt werden. Die kurzen Kanten von No. III lagen ebenfalls parallel den breiten Seitenflächen von I′ und waren 3,04 mm lang; die mittleren, 5,85 mm messend, waren somit parallel einer Dodekaëdernormale.

Das Prisma II repräsentirt den Fall, wo der oben mit φ bezeichnete Winkel gleich Null ist, da ja die Druckrichtung eine Würfelnormale ist. Es wird daher nach der Theorie durch die Compression optisch einaxig, und die auf beiden Seitenflächen mittelst des Compensators gemessenen Grössen C_3, C_3' müssen beide $= \frac{-a}{v^2}$ sein, wie aus 3) sofort ersichtlich ist. Beim Prisma III liegt die Druckrichtung in einer Dodekaëderfläche; auf ihren schmaleren Seitenflächen muss die eine Auslöschungsrichtung mit der Druckrichtung einen Winkel $\vartheta - \chi$ bilden, wo ϑ durch 5) gegeben ist, und durch die Compensatorbeobachtungen findet man $C_4 = \frac{-b}{v^2} \cdot \frac{\sin 2\chi}{\sin 2\vartheta}$; auf den breiteren Seitenflächen ist die Auslöschung gerade und es wird beobachtet:

$$C_5 = \frac{-b}{v^2} \sin\chi \left(\frac{\cos^3(\vartheta - \chi)}{\sin\vartheta} + \frac{\sin^3(\vartheta - \chi)}{\cos\vartheta} \right).$$

Zu den Beobachtungen auf der Schmalseite ist zu bemerken, dass zunächst die Auslöschungsschiefe $\vartheta - \chi$ durch Einstellung der Nicols auf grösste Dunkelheit ermittelt und dann der Compensator um diesen Winkel oder dessen Complement aus seiner gewöhnlichen Stellung herausgedreht wurde.

In den folgenden Tabellen sind die auf den einzelnen Prismenflächen an je 3 Stellen (linker Rand = L. Rd., Mitte = M., rechter Rand = R. Rd.) im Mittel beobachteten Streifenverschiebungen δ in Umdrehungen der Mikrometerschraube des Compensators, ferner die Breite der betreffenden Fläche B und die Belastung des Hebels Q angegeben. Wo nichts besonders gesagt ist, wurde mit Natriumlicht beobachtet, für welches der Brechungsindex des Kalialauns nach Soret = 1,456 angenommen wurde und der Streifenabstand im Compensator 23,809 Umdrehungen betrug.

Compensator-Messungen am Kalialaun.

Prisma I.

Würfelfläche, B = 9,4 mm.

	L. Rd.	M.	R. Rd.		
Q = 1873 g	0,268	0,292 bis 0,308	0,294	$\delta = 0{,}294.$	$C_1 = 0{,}5055 \cdot 10^{-8}$
Q = 2809 g	0,381	0,418	0,422	$\delta = 0{,}407.$	$C_1 = 0{,}467 \cdot 10^{-8}$

Mittel: $C_1 = 0{,}4863 \cdot 10^{-8}$.

Dodekaëderfläche, B = 5,98 mm.

	L. Rd.	M.	R. Rd.		
Q = 1873 g	1,986	2,038	2,187	$\delta = 2{,}070.$	$C_2 = 2{,}264 \cdot 10^{-8}$
Q = 1873 g	2,486	2,045	1,849	$\delta = 2{,}127.$	$C_2 = 2{,}324 \cdot 10^{-8}$

Mittel: $C_2 = 2{,}294 \cdot 10^{-8}$.

Prisma I'.

Würfelfläche, B = 5,925 mm.

	L. Rd.	M.	R. Rd.		
Q = 1873 g	0,468	0,450	0,541	$\delta = 0{,}486$	$C_1' = 0{,}4983 \cdot 10^{-8}$
Q = 1873 g	0,367	0,465	0,569	$\delta = 0{,}467$	

Dodekaëderfläche, B = 10,1 mm.

	L. Rd.	M.	R. Rd.		
Q = 1873 g	1,348	1,174	1,155	$\delta = 1{,}226.$	$C_2' = 2{,}268 \cdot 10^{-8}$

Prisma II.

Erste Würfelfläche, B = 5,28 mm.

	L. Rd.	M.	R. Rd.		
Q = 936 g	2,132	2,268	2,314	$\delta = 2{,}238.$	$C_3 = 4{,}325 \cdot 10^{-8}$

Zweite Würfelfläche, B = 5,01 mm.

	L. Rd.	M.	R. Rd.		
Q = 936 g	2,408	2,393	2,332	$\delta = 2{,}378.$	$C_3' = 4{,}367 \cdot 10^{-8}$.

Es muss nun der Theorie zufolge C_3 und $C_3' = \frac{-a}{v^2}$, C_1 und $C_1' = -\frac{b}{v^2}$, C_2 und $C_2' = -\frac{a+b}{2v^2}$ sein. Bezeichnet man die Mittel aus den beobachteten Werthen dieser Grössen der Reihe nach mit x, y, z, wo also

$$x = -4{,}346 \cdot 10^{-8},\ y = -0{,}501 \cdot 10^{-8},\ z = -2{,}286 \cdot 10^{-8}$$

ist, so hat man zur Berechnung der Constanten $\frac{a}{v^2}$ und $\frac{b}{v^2}$ die drei Gleichungen:

$$x = -\frac{a}{v^2},\ y = -\frac{b}{v^2},\ z = -\frac{a+b}{2v^2},$$

woraus sich (nach der Methode der kleinsten Quadrate) ergibt:

$$\frac{a}{v^2} = \tfrac{1}{6}(-5x + y - 2z) = -\mathbf{4{,}30} \cdot \mathbf{10^{-8}}.$$

$$\frac{b}{v^2} = \tfrac{1}{6}(-5y + x - 2z) = -\mathbf{0{,}455} \cdot \mathbf{10^{-8}}.$$

Es bestehen dann folgende Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Werthen:

	Beob.	Ber.	Diff.
$-\frac{a}{v^2} \cdot 10^8$	4,346	4,30	+0,046
$-\frac{b}{v^2} \cdot 10^8$	0,501	0,455	+0,046
$-\frac{a+b}{2v^2} \cdot 10^8$	2,286	2,378	−0,092

Am Prisma III wurde auf dem zu einer Dodekaëderfläche parallelen Flächenpaar eine Abweichung der Auslöschungsrichtungen von der Druckrichtung und der zu ihr senkrechten beobachtet, welche etwa 21° (bei verschiedenen Messungen 20° 13′ bis 21° 40′) betrug. Dementsprechend wurde der Compensator aus seiner gewöhnlichen Stellung um etwa 69° nach der zu jener Abweichung entgegengesetzten Seite (um die zur Beobachtungsrichtung parallele Axe) gedreht, und um den gleichen Betrag natürlich die beiden Nicols. Bei dieser Anordnung wurde beobachtet (bei zwei Stellungen des Prismas, die sich durch eine Drehung von 180° um die Verticale unterschieden):

	Üb. d. Mitte.	Unt. d. Mitte.		
Q = 1873 g	1,093	1,073	$\delta = 1{,}083$	$C_4 = 0{,}563 \cdot 10^{-8}$.
B = 3,036 mm	0,950	0,933	$\delta = 0{,}941$	

Auf dem zur Dodekaëderfläche senkrechten Flächenpaar war die Auslöschung merklich parallel zur Druckrichtung und es wurde gemessen:

	L. Rd.	M.	R. Rd.		
Q = 1873 g	0,58	0,59	0,60	$\delta = 0{,}59$	$C_5 = 0{,}657 \cdot 10^{-8}$.
B = 5,85 mm	0,67	0,60	0,655	$\delta = 0{,}64$	

Der Winkel χ, welchen die Druckrichtung mit der nächstliegenden Würfelnormale einschliesst, muss hier, wie schon erwähnt, als Unbekannte eingeführt und erst aus den Beobachtungen selbst berechnet werden. Hierzu kann eine der

Grössen C_4 und C_5 unter Benutzung der oben gefundenen Werthe von a und b verwendet werden.

Am einfachsten wählt man hierzu die Grösse C_4, welche gegeben ist durch $-\frac{b}{v^2}\cdot\frac{\sin 2\chi}{\sin 2\vartheta}$. Da $\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{4b\sin 2\chi}{a-b+(3a+b)\cos 2\chi}$ ist, so wird:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{-4C_4\sin 2\vartheta}{\frac{a-b}{v^2}+\frac{3a+b}{v^2}\sqrt{1-\left(\frac{C_4 v^2}{b}\right)^2\sin^2 2\vartheta}},$$

was für $\cos 2\vartheta$ die quadratische Gleichung ergibt:

$$\cos^2 2\vartheta - \frac{2b^2}{3C_4 v^2(3a+5b)}\cos 2\vartheta = \frac{C_4^2 v^4 - 8a(a+b)}{3C_4^2 v^4(a-b)(3a+5b)}\cdot b^2.$$

Aus derselben folgt:

$$\vartheta = 26^0\ 19',$$

und hieraus weiter:

$$\chi = 50^0\ 24\tfrac{1}{2}'.$$

Die Auslöschungsschiefe auf den Dodekaëderflächen müsste danach sein

$$\chi - \vartheta = 24^0\ 5\tfrac{1}{2}',$$

während die Beobachtungen durchschnittlich 21° ergaben. Die Differenz von 3° erscheint in Anbetracht der Unsicherheit, mit welcher die Einstellung auf grösste Dunkelheit der nur schwach doppeltbrechenden Platte verbunden war, sowie des grossen Einflusses einer geringen Änderung der Druckrichtung (siehe unten) nicht allzu gross. Mit Zugrundelegung obigen Werthes für χ findet man endlich aus der S. 229 angegebenen Formel:

$$C_5 = 0{,}630\ .\ 10^{-8};$$

beobachtet wurde im Mittel der Werth $0{,}657\ .\ 10^{-8}$, die Übereinstimmung ist also befriedigend.

Schliesslich ist zu erwähnen, dass am Prisma I auch Beobachtungen mit r o t h e m Licht angestellt wurden, welches durch Anwendung eines rothen Glases erhalten wurde. Der Streifenabstand im Compensator betrug dabei 25,84 Umdrehungen der Mikrometerschraube, folglich die Wellenlänge λ_r $589\cdot\frac{25{,}84}{23{,}81}\cdot 10^{-6}$ = ca. $640\ .\ 10^{-6}$ mm. Es wurden bei 1873 g Belastung folgende Verschiebungen gemessen.

Beobachtungsrichtung Würfelnormale.

L. Rd.	M.	R. Rd.	
0,300	0,324	0,316	$\delta = 0{,}313,\ C_1^{(r)} = 0{,}541 \,.\, 10^{-8}.$

Beobachtungsrichtung Dodekaëdernormale.

L. Rd.	M.	R. Rd.	
2,144	2,217	2,247	$\delta = 2{,}203,\ C_2^{(r)} = 2{,}420 \,.\, 10^{-8}.$

Daraus folgt (durch Vergleichung mit den für Na-Licht gefundenen Werthen von C_1, C_2):

$$\frac{b^{(r)}}{v^2} = -0{,}506 \,.\, 10^{-8},\quad \frac{a^{(r)} + b^{(r)}}{2\,v^2} = -2{,}507 \,.\, 10^{-8},\quad \frac{a^{(r)}}{v^2} = -4{,}508 \,.\, 10^{-8}.$$

Demnach ist $\frac{b}{v^2}$ um $\frac{1}{9}$, $\frac{a}{v^2}$ um $\frac{1}{21}$ und der Quotient $\frac{b}{a}$ $= 0{,}1105$ um etwa $\frac{1}{23}$ grösser als für Natriumlicht. Als sehr sicher sind jedoch diese Zahlen nicht zu betrachten, da sie aus nur zwei Beobachtungsreihen abgeleitet sind.

Discussion der Resultate. — Nach den mitgetheilten Beobachtungsresultaten besitzen die Constanten $\frac{a}{v^2}$ und $\frac{b}{v^2}$ für Kalialaun zwar gleiches Vorzeichen, aber ausserordentlich verschiedene Grösse; denn ihr Quotient hat den kleinen Werth

$$\frac{b}{a} = +0{,}1058.$$

Da derselbe positiv und < 1 ist, so gehört der Kalialaun bezüglich seines piëzo-optischen Verhaltens demselben (in meiner früheren Arbeit mit II bezeichneten) Typus an wie Steinsalz; doch treten die Erscheinungen, welche dieses Verhalten von demjenigen isotroper Körper unterscheiden, wegen des kleinen Werthes von $\frac{b}{a}$ viel stärker hervor, wie wir sogleich sehen werden. Zunächst sei an die Bedeutung der Grössen $\frac{a}{v^2}$ und $\frac{b}{v^2}$ selbst erinnert: dieselben bestimmen die Stärke der Doppelbrechung des durch einseitigen Druck von der Intensität 1, der das eine Mal parallel einer Würfelnormale, das andere Mal parallel einer Oktaëdernormale ausgeübt wird, optisch einaxig gemachten Krystalls. Die Doppelbrechung ist also beim Kalialaun im ersten Falle 9,45 mal so gross, wie im zweiten Falle. Ihr Charakter ist, da a und b beide negatives Vorzeichen haben, in beiden Fällen negativ, wie bei

Steinsalz oder Glas; ein parallel einer Würfel- oder Oktaëdernormale wirkender Zug würde den Krystall positiv einaxig machen.

Wir wollen nun die Änderungen des optischen Verhaltens betrachten, welche eintreten, wenn der einseitige Druck successive alle möglichen Richtungen in einer Würfelfläche 001 und Dodekaëderfläche $1\bar{1}0$ annimmt, wobei man sich natürlich auf je einen Quadranten beschränken kann. Da ich die allgemeinen Formeln für die Lagen der optischen Symmetrieaxen und den Winkel der optischen Axen in ihrer Abhängigkeit von der Druckrichtung früher (Ann. d. Phys. N. F. **39**. 445—453) entwickelt habe, so will ich hier nur die Resultate angeben, die übrigens mit Hilfe der Formeln 2) bis 6) leicht abzuleiten sind. Die Lage jener ausgezeichneten Richtungen ist unabhängig von der Grösse des Druckes und daher lediglich (ausser durch die Druckrichtung) durch den Quotienten $\frac{b}{a}$ bestimmt.

Lässt man die Druckrichtung sich, immer einer Würfelfläche parallel bleibend, von einer Würfelnormale, der X^0-Axe, aus gegen eine (um 45^0 gegen sie geneigte) Dodekaëdernormale hin drehen, so wird der Krystall optisch zweiaxig in der Weise, dass die Ebene der optischen Axen senkrecht zu jener Würfelfläche, also die eine Mittellinie die Normale der letzteren ist. Die andere Mittellinie liegt zwischen der Druckrichtung und der X^0-Axe, mit ersterer einen Winkel $\varphi - \psi = \Phi$ bildend, welcher ein Maximum Φ' erreicht für die Neigung $\varphi' = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}$ der Druckrichtung gegen die X^0-Axe; für Kaliumalaun wird $\varphi' = 36^0\,0'$, $\Phi' = 27^0\,0'$, wonach also auf den Würfelflächen eines Prismas, dessen Längsrichtung 9^0 mit einer Dodekaëdernormale bildet, eine Auslöschungsschiefe von 27^0 auftreten muss. Es geht hieraus schon hervor, dass sich die betreffende optische Symmetrieaxe sehr viel langsamer von der X^0-Axe entfernt, wie die Druckrichtung; in der That hat $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ für $\varphi = 0$ den Werth $\frac{b}{a} = 0{,}106$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$ den Werth $1 - \frac{b}{a} = 0{,}894$. Dagegen bewirkt eine geringe Abweichung der Druckrichtung von einer Dodekaëdernormale

schon eine 8,45 Mal so grosse Auslöschungsschiefe, da sich $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -8{,}45$ ergibt für $\varphi = 45^0$.

Der Winkel der optischen Axen 2Ω wächst mit φ und erreicht ein Maximum für $\varphi = 45^0$, d. h. für einen parallel einer Dodekaëdernormale wirkenden Druck; dieser Maximalwerth ist:

$$2\Omega^{\mathrm{I}} = 2 \arccos \sqrt{\frac{2b}{a+b}} = 128^0\,12',$$

so dass also die Dodekaëdernormale zweite Mittellinie wird.

Wenn die Druckrichtung aus der letzteren Lage (Normale von 110) in eine Oktaëdernormale (von 111) übergeht, so nimmt der Axenwinkel bis 0 ab, während die Ebene der optischen Axen die Ebene $1\bar{1}0$ bleibt, und der Winkel ϑ zwischen der einen Mittellinie und der Normale von 001 sinkt von 90^0 bis $54^0\,44'$, wobei er immer grösser bleibt als χ. Die Auslöschungsschiefe auf den zu $1\bar{1}0$ parallelen Prismenflächen erreicht ein Maximum $\Phi^{\mathrm{IV}} = 16^0\,56\frac{1}{2}'$ für eine Druckrichtung, welche mit der Z^0-Axe (Normale von 001) den durch:

$$\cos 2\chi^{\mathrm{IV}} = \frac{b - 3a - \sqrt{(14b)^2 + 96ab}}{3(5b + 3a)}$$

bestimmten Winkel $\chi^{\mathrm{IV}} = 63^0\,37'$ bildet. Bei Annäherung der Druckrichtung an die Oktaëdernormale (für die $\chi = 54^0\,44'$ ist) ändert sich die Lage der Mittellinien sehr schnell, denn es wird $\frac{\partial \vartheta}{\partial \chi} = \frac{2a + b}{3b} = 6{,}62$ für $\chi = 54^0\,44'$.

Mit derselben relativen Geschwindigkeit entfernt sich die erste Mittellinie wieder von der Oktaëdernormale, wenn $\chi < 54^0\,44'$ wird; daher liegt für das Intervall $54^0\,44' > \chi > 0^0$ die erste Mittellinie zwischen der Druckrichtung und der durch $\chi = 0$ bestimmten Würfelnormale (Z^0). Der Winkel $\Phi = \vartheta - \chi$ zwischen der Mittellinie und Druckrichtung, — also die Auslöschungsschiefe eines Prismas auf der Dodekaëderfläche —, erreicht ein Maximum für:

$$\cos 2\chi^{\mathrm{III}} = \frac{b - 3a + \sqrt{(14b)^2 + 96ab}}{3(5b + 3a)},$$

$$\chi^{\mathrm{III}} = 43^0\,19\frac{1}{2}';$$

der entsprechende Winkel ϑ^{III} ist $= 10^0\,44'$, folglich hat das Maximum von Φ den sehr beträchtlichen Werth $\Phi^{\mathrm{III}} = -32^0\,35\frac{1}{2}'$.

Man erkennt aus diesen Zahlen, dass die erste Mittellinie der Würfelnormale $\chi = 0$ schon ziemlich nahe liegt, wenn die Druckrichtung erst um 10—11° gegen die Oktaëdernormale geneigt ist. Nimmt man das analoge Ergebniss, welches wir oben für den Fall einer in 001 liegenden Druckrichtung constatirten, hinzu, so kann man schliessen, dass im Kalialaun, wenn die Richtung des einseitigen Druckes nicht mehr als 36° gegen eine Würfelnormale geneigt ist, die eine optische Symmetrieaxe von dieser Würfelnormale um höchstens 9° abweicht. — Die zweite Mittellinie ist, so lange $54^0\,44' < \chi < 0^0$ ist, senkrecht zu der die Druckrichtung enthaltenden Dodekaëderfläche. Der Winkel zwischen den optischen Axen 2Ω wächst bei Entfernung der Druckrichtung von der Oktaëdernormale zunächst ausserordentlich schnell, erreicht ein Maximum:

$$2\,\Omega^{\mathrm{II}} = 2\arcsin\sqrt{\mathrm{tg}\,(\chi^{\mathrm{II}} - \vartheta^{\mathrm{II}})\,\mathrm{tg}\,\vartheta^{\mathrm{II}}} = 56^0\,20'$$

für

$$\chi^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\arccos\frac{3\,\mathrm{b} - \mathrm{a}}{3\,\mathrm{b} + 3\,\mathrm{a}} = 50^0\,56',$$

also für eine nicht einmal 4° von der Oktaëdernormale abweichende Druckrichtung, und nimmt sodann wieder ab, bis er für $\chi = 0$ ebenfalls $= 0$ wird.

Das im Vorhergehenden beschriebene, auf Grund der Bestimmungen von a und b aus der Theorie abgeleitete Verhalten des einseitig comprimirten Alauns lässt nun die p. 222 erwähnten Beobachtungen Wertheim's sehr erklärlich erscheinen. Das Parallelepiped, an welchem er jene Beobachtungen gemacht hat, war, wie aus seiner zweiten Arbeit hervorgeht, „senkrecht zu einer Oktaëderfläche" geschnitten, worunter jedenfalls zu verstehen ist, dass eine Kante senkrecht zu einer Oktaëderfläche sein sollte. Eine ganz geringe Abweichung von dieser Orientirung kann aber nach dem Vorhergehenden schon Auslöschungsschiefen und Differenzen der relativen Verzögerungen auf den zu dieser Kante parallelen Flächenpaaren verursachen, welche die von Wertheim beobachtete Grösse erreichen. Dass letzterer solche Abweichungen auch auf den übrigen Flächenpaaren gefunden hat, dürfte darauf zurückzuführen sein, dass die beiden in der Oktaëderfläche gelegenen Kanten eine beliebige Orientirung hatten. Die

in den Sätzen I und II, S. 222—223, enthaltenen Bemerkungen WERTHEIM's über die Beobachtungen an den „zu einer Würfelfläche senkrechten" Parallelepipeden finden nach unseren Entwickelungen ebenfalls ihre Erklärung, wenn die jener Würfelfläche parallelen Kanten nicht mit den in derselben liegenden Würfel- oder Dodekaëdernormalen zusammenfielen; unser Resultat auf S. 234 erklärt, dass auf den zu der Würfelfläche senkrechten Flächenpaaren von WERTHEIM immer gerade Auslöschung beobachtet wurde. Die Unabhängigkeit der Auslöschungsrichtungen von der Grösse des Druckes, welche WERTHEIM besonders auffallend erschien, folgt nothwendig aus der Theorie.

In seiner ersten Mittheilung bemerkt WERTHEIM, dass seine comprimirten Alaunprismen im weissen Lichte keine vollständige Auslöschung gezeigt hätten. Dies würde eine sehr starke Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{b}{a}$ von der Wellenlänge voraussetzen; bei dem von mir untersuchten Alaun war diese Abhängigkeit, soweit aus den Beobachtungen mit rothem Glas (cf. S. 233) zu schliessen ist, nur gering, und in der That habe ich auf den schief auslöschenden Flächen des Prismas III auch im weissen Lichte merklich vollständige Auslöschung beobachtet.

Beobachtungen an Ammoniakalaun. — Die Krystalle, welche ich durch langsames Verdunsten einer Lösung von käuflichem, angeblich chemisch reinem, in Wahrheit aber eine durch die Flammenfärbung deutlich nachweisbare Spur Kalium enthaltenden Ammoniakalaun erhielt, waren mehr oder weniger tafelförmig nach einer Oktaëderfläche entwickelt und zeigten ausser den Flächen von (111) noch in untergeordneter Ausbildung jene von (100) und (110). Sie waren sämmtlich ziemlich stark doppeltbrechend, und zwar im Wesentlichen in der Weise, wie es zuerst von F. KLOCKE[1], sowie ausführlich von R. BRAUNS[2] beschrieben worden ist, d. h. die Krystalle verhielten sich wie aus Sectoren (Pyramiden) zusammengesetzt, welche die Oktaëderflächen zu Basisflächen

[1] F. KLOCKE, dies. Jahrb. 1880. I. 51—88.

[2] R. BRAUNS, dies. Jahrb. 1883. II. 104; 1885. I. 96—118 u. Preisschrift No. XXIX der JABLONOWSKI'schen Gesellschaft. 1891. 226—238.

haben und optisch einaxig sind mit zu ihrer Basis senkrechter optischer Axe und negativem Charakter der Doppelbrechung, während an die Auflagerungsfläche immer ein einfach brechendes Feld grenzt. Natürlich waren die Begrenzungen der einzelnen Sectoren gegen einander nicht ebenflächig und nicht vollkommen scharf. Einige Abweichungen von dem beschriebenen Verhalten werden wir weiter unten zu erwähnen haben. Da der Ammoniakalaun ebenso wie der Kalialaun durch Druck parallel einer Oktaëdernormale negativ einaxig wird, (siehe unten), so verhält sich also jeder Sector des anomalen Krystalls so, als ob er senkrecht zu der ihn begrenzenden Oktaëderfläche comprimirt oder in allen Richtungen parallel derselben gleichmässig dilatirt wäre. Daraus ist natürlich nicht zu schliessen, dass die anomale Doppelbrechung wirklich durch eine Spannung parallel den Oktaëderflächen verursacht ist. Wir lassen hier vielmehr die Ursache der natürlichen Doppelbrechung ganz dahin gestellt sein und nehmen nur als durch die Beobachtungen erwiesen die Existenz der negativ einaxigen Sectoren mit zu den begrenzenden Flächen von (111) senkrechten optischen Axen an. Dieser natürlichen Doppelbrechung superponirt sich nun die durch den Druck erzeugte, und wir haben uns zunächst davon Rechenschaft zu geben, wie hierdurch die durch Druck hervorgebrachten Erscheinungen modificirt werden. Analytisch kommt jene Superposition durch Addition der entsprechenden, auf ein und dasselbe Coordinatensystem bezogenen Grössen B_{hk} (siehe S. 224) zum Ausdruck. Dabei sollen die durch den Druck erzeugten Änderungen der Grössen B_{hk} ebenso berechnet werden, als wenn keine natürliche Doppelbrechung vorhanden wäre; d. h. es wird die Annahme gemacht, dass die Structur des Krystalls bei Berechnung der Einwirkung von Deformationen auf die bei den Lichtschwingungen wirkenden Kräfte noch als dem regulären Krystallsysteme entsprechend angesehen werden kann, eine Annahme, die wohl mit Rücksicht auf die sehr geringe Intensität der Doppelbrechung optisch anomaler regulärer Krystalle im Verhältniss zu derjenigen, welche selbst die am schwächsten doppeltbrechenden hexagonalen oder tetragonalen Krystalle besitzen, von vornherein zulässig erscheint. Dementsprechend sind die Gleichungen 1) zu ersetzen durch:

$$7)\quad \begin{aligned} B_{11} &= B_{11}{}^0 - aX_x - c(X_x + Y_y + Z_z),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ B_{23} &= B_{23}{}^0 - bY_z,\\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wo $B_{11}{}^0, \ldots B_{23}{}^0, \ldots$ die natürliche Doppelbrechung bestimmen, also nur für je einen optisch homogenen Sector constant sind. Für einen Sector des Krystalls, in welchem die optische Axe in Bezug auf die Würfelnormalen X^0, Y^0, Z^0 die Richtungscosinus γ_1, γ_2, γ_3 besitzt, und in dem $\omega_o{}^0$, $\omega_e{}^0$ die Hauptlichtgeschwindigkeiten sind, ist:

$$8)\quad \begin{aligned} B_{11}{}^0 &= \omega_o{}^{0^2} + (\omega_e{}^{0^2} - \omega_o{}^{0^2})\gamma_1{}^2, \quad B_{22}{}^0 = \omega_o{}^{0^2} + (\omega_e{}^{0^2} - \omega_o{}^{0^2})\gamma_2{}^2,\\ B_{33}{}^0 &= \omega_o{}^{0^2} + (\omega_e{}^{0^2} - \omega_o{}^{0^2})\gamma_3{}^2,\\ B_{23}{}^0 &= (\omega_e{}^{0^2} - \omega_o{}^{0^2})\gamma_2\gamma_3, \quad B_{31}{}^0 = (\omega_e{}^{0^2} - \omega_o{}^{0^2})\gamma_3\gamma_1,\\ B_{12}{}^0 &= (\omega_e{}^{0^2} - \omega_o{}^{0^2})\gamma_1\gamma_2. \end{aligned}$$

Die bei unseren Alaunkrystallen vorkommenden Werthe von γ_1, γ_2, γ_3 sind $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ mit verschiedenen Combinationen der Vorzeichen, da ja die optische Axe immer eine Oktaëdernormale ist. Bezeichnet man zur Abkürzung $\frac{1}{3}(\omega_e{}^{0^2} - \omega_o{}^{0^2})$ mit $+ d$ (wo d eine positive Grösse ist), so ist also im Folgenden immer:

$$7')\quad \begin{aligned} B_{11} &= \omega_o{}^{0^2} + d - aX_x - c(X_x + Y_y + Z_z),\\ B_{22} &= \omega_o{}^{0^2} + d - aY_y - c(X_x + Y_y + Z_z),\\ B_{33} &= \omega_o{}^{0^2} + d - aZ_z - c(X_x + Y_y + Z_z),\\ B_{23} &= \pm d - bY_z,\\ B_{31} &= \pm d - bZ_x,\\ B_{12} &= \pm d - bX_y, \end{aligned}$$

wo in den drei letzten Ausdrücken folgende Vorzeichen für d zu nehmen sind je nach dem Oktanten, in welchem die optische Axe liegt:

1. Oktant $(+X^0, +Y^0, +Z^0): + + +$,
2. „ $(+X^0, -Y^0, +Z^0): - + -$,
3. „ $(+X^0, -Y^0, -Z^0): + - -$,
4. „ $(+X^0, +Y^0, -Z^0): - - +$,

und dieselbe Vorzeichencombination jedesmal für den gegenüberliegenden Oktanten. — Die Ausdrücke 7') zeigen, dass zwar noch die Differenzen von B_{11}, B_{22}, B_{33}, aber nicht mehr B_{23}, B_{31}, B_{12} dem Drucke proportional sind, woraus folgt, dass die Richtung der optischen Symmetrieaxen bei einseitigem Drucke von der Grösse des letz-

teren nicht mehr unabhängig ist, wenn natürliche Doppelbrechung vorhanden ist. Dies macht sich für die Beobachtung direct durch Veränderlichkeit der Auslöschungsrichtungen eines Prismas von gegebener Orientirung bemerklich. Für diese Abhängigkeit der Auslöschungsrichtungen von der Grösse des Druckes lässt sich ein allgemein giltiges Gesetz folgendermaassen ableiten. Die Gleichung des Ovaloids des comprimirten (oder überhaupt deformirten) Krystalles bezogen auf ein beliebiges Axensystem X, Y, Z lässt sich schreiben:

$$\varrho^2 = B_{11}\mu^2 + B_{22}\nu^2 + B_{33}\pi^2 + 2B_{23}\nu\pi + 2B_{31}\pi\mu + 2B_{12}\mu\nu,$$

und diejenige seiner Schnittcurve mit der XY-Ebene, welche die zu betrachtende Prismenfläche sei, somit:

$$\begin{aligned}\varrho^2 &= B_{11}\mu^2 + B_{22}\nu^2 + 2B_{12}\mu\nu \\ &= B_{11}\cos^2\varphi + B_{22}\sin^2\varphi + B_{12}\sin 2\varphi,\end{aligned}$$

wo φ den Winkel zwischen dem Radius-Vector und der X-Axe bezeichnet. (Die Grössen B_{hk} haben hier vorübergehend eine andere Bedeutung, wie bisher, wo sie auf das krystallographische Axensystem X^0, Y^0, Z^0 bezogen waren.)

Die Schwingungsrichtungen der in der Z-Richtung sich fortpflanzenden beiden Wellen sind nun die Richtungen des grössten und kleinsten Radius-Vector dieser Curve, also gegeben durch:

$$\frac{\partial\varrho^2}{\partial\varphi} = (B_{22} - B_{11})\sin 2\varphi + 2B_{12}\cos 2\varphi = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B_{12}}{B_{11} - B_{22}},$$

welche Gleichung natürlich zwei um 90^0 verschiedene Winkel: φ_1 und $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, liefert. Nun bestehen die Grössen B_{hk}, wie wir oben sahen, je aus einem vom Drucke unabhängigen und einem dem Drucke proportionalen Gliede, so dass man setzen kann:

$$B_{hk} = B_{hk}^{\,0} + B_{hk}' \cdot p.$$

Die X-Axe werde in der betrachteten Fläche so gewählt, dass $B_{12}^{\,0} = 0$ ist, d. h. sie werde in die eine ursprüngliche Schwingungsrichtung gelegt, so dass also φ die durch den Druck p bewirkte Drehung der Schwingungsrichtungen (in der Richtung von der + X- gegen die + Y-Axe hin) bedeutet. Dann wird:

8) $$\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{B_{11}' - B_{22}'}{2B_{12}'} + \frac{B_{11}^0 - B_{22}^0}{2B_{12}' p}.$$

Das erste Glied der rechten Seite ist $= \operatorname{cotg} 2\Phi$, wenn man mit Φ die Abweichung derjenigen Auslöschungsrichtungen von der X- und Y-Axe bezeichnet, welche im comprimirten Krystall vorhanden sein würden, falls er keine natürliche Doppelbrechung besässe. Das zweite Glied gestattet ebenfalls eine einfache Deutung. Man hat nämlich für die Differenz des Maximums und Minimums von ϱ^2 in der XY-Ebene:

9) $$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = (B_{11} - B_{22}) \cos 2\varphi_1 + 2B_{12} \sin 2\varphi_1 = \sqrt{(B_{11} - B_{22})^2 + 4B_{12}^2},$$

also auch speciell

$$\varrho_1^{0^2} - \varrho_2^{0^2} = B_{11}^0 - B_{22}^0$$

und

$$\varrho_1'^2 - \varrho_2'^2 = \sqrt{(B_{11}' - B_{22}')^2 + 4B_{12}'^2} = \frac{2B_{12}'}{\sin 2\Phi},$$

wo die letztere Differenz $\varrho_1'^2 - \varrho_2'^2$ für den Fall fehlender natürlicher Doppelbrechung gilt. Man kann also schreiben

$$\operatorname{cotg} 2\varphi = \operatorname{cotg} 2\Phi + \frac{\varrho_1^{0^2} - \varrho_2^{0^2}}{p(\varrho_1'^2 - \varrho_2'^2) \sin 2\Phi},$$

oder auch, da man die Grössen $\varrho_1^{0^2} - \varrho_2^{0^2}$ und $\varrho_1'^2 - \varrho_2'^2$ durch die ihnen proportionalen relativen Verzögerungen δ^0 und δ_1 ersetzen kann, welche die beiden der XY-Ebene parallelen Wellen einmal in der uncomprimirten Platte vermöge deren natürlicher Doppelbrechung, zweitens bei fehlender natürlicher Doppelbrechung in Folge des Druckes $p = 1$ allein erleiden würden:

8') $$\operatorname{cotg} 2\varphi = \operatorname{cotg} 2\Phi + \frac{\delta^0}{p\delta_1 \sin 2\Phi}.$$

Diese Formel enthält nur noch das direct beobachtbare δ^0 und die nach der Theorie aus den Constanten a, b und der gegebenen Orientirung der Platte zu berechnenden Grössen δ_1 und Φ. Sie lehrt unter Anderem, dass die Schwingungsrichtungen nur dann bei der Compression ungeändert bleiben, wenn sie schon von Natur diejenige Lage haben, welche sie unter Wirkung des Druckes allein annehmen würden, d. h. wenn $\Phi = 0$ oder 90^0 ist. In diesem Falle ist $B_{12}' = 0$ und $\varphi_1 = 0$, folglich nach 9)

$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = B_{11} - B_{22} = \varrho_1^{0^2} - \varrho_2^{0^2} + p(\varrho_1'^2 - \varrho_2'^2),$$

was besagt, dass sich der durch die Compression erzeugte

Gangunterschied einfach zu dem von der anomalen Doppelbrechung herrührenden algebraisch addirt und somit, da ja auch die Schwingungsrichtungen unverändert bleiben, mittelst des Compensators ebenso unmittelbar gefunden werden kann, als ob gar keine anomale Doppelbrechung vorhanden wäre. Dieser Fall ist daher am günstigsten für die Bestimmung der piëzooptischen Constanten des Krystalls. Er liegt vor bei einem Prisma, dessen Längsrichtung parallel einer Dodekaëderkante ist und dessen Seitenflächen bezw. einer Würfelfläche, etwa 001, und einer Dodekaëderfläche $1\bar{1}0$ parallel sind, wie beim Prisma I von Kalialaun; die Orientirung desselben gegen das Coordinatensystem $X^0 Y^0 Z^0$ wird durch Taf. VI Fig. 1 veranschaulicht. Ein solches Prisma besteht im Wesentlichen aus zwei durch diejenige Würfelebene, welche die den Längskanten parallele Dodekaëderkante enthält, getrennten Hälften, in denen vor der Compression die optische Axe senkrecht zur Längsrichtung und unter $54^0\,44'$ gegen die Dodekaëderflächen des Prismas geneigt liegt. (Vergl. die Figur, wo die feinpunktirte Linie die Trennungslinie der beiden Hälften bedeutet und auf der Endfläche die Lage der optischen Axe angedeutet ist.) Diese Neigung hat zwar für die beiden Hälften verschiedenen Sinn (sie ist symmetrisch zu deren Trennungsfläche), allein für Wellen, die normal zu den Seitenflächen des Prismas hindurchgehen, macht dies keinen Unterschied. Auf beiden Prismenflächen liegen die Schwingungsrichtungen im ursprünglichen Zustande parallel und senkrecht zu den langen Kanten, und da sie diese Richtung auch in dem parallel der Längsrichtung comprimirten Prisma haben würden, wenn dasselbe von Natur einfach brechend wäre (vergl. Prisma I des Kaliumalauns), so sind in der That nach dem oben Gesagten die Compensatormessungen auf beiden Prismenflächen ganz unabhängig von der natürlichen Doppelbrechung.

Das zur Untersuchung gelangte Prisma von der eben betrachteten Orientirung, dessen Dimensionen die Hälfte derjenigen von Fig. 1 sind, zeigt, abgesehen von den noch zu erwähnenden Eckfeldern, auf den Würfelflächen 001 gleichförmige anomale Doppelbrechung mit einem Gangunterschied von ca. 0,356 Wellenlängen für Na-Licht, wobei die Polarisationsrichtung der schnelleren Welle parallel den Längs-

kanten ist. Auf den Dodekaëderflächen erscheinen die schon erwähnten beiden Hälften getrennt durch einen schmalen Streifen von entgegengesetztem Charakter der Doppelbrechung; die beiden Hälften zeigen ziemlich homogene Doppelbrechung von demselben Sinne, wie auf den Würfelflächen, und von der Intensität = 0,152 Wellenlängen. Die auf 1 mm Dicke bezogene relative Verzögerung auf den Würfelflächen müsste sich zu derjenigen auf den Dodekaëderflächen, wenn die über die Art der natürlichen Doppelbrechung gemachte Annahme zutrifft, wie $\sin^2 54^0\,44' : \cos^2 54^0\,44' = 2 : 1$ verhalten; nach den eben erwähnten Beobachtungen ist dieses Verhältniss $\frac{0{,}356}{4{,}99} : \frac{0{,}152}{3{,}78} = 1{,}77 : 1$, welcher kleinere Werth der parallel zu den Würfelflächen verlaufenden dünnen Lamelle von entgegengesetzter Doppelbrechung zuzuschreiben ist. Das beschriebene optische Verhalten auf den Dodekaëderflächen tritt deutlich in der Taf. VI Fig. 2 hervor, welche nach einer Photographie in 3facher Vergrösserung die Erscheinung darstellt, welche die Platte in Combination mit einem Quarzkeil, dessen Kante horizontal und dessen optische Axe vertical liegt, im parallelen Natriumlichte zwischen gekreuzten Nicols, deren Polarisationsebenen unter $\pm 45^0$ gegen die Verticale geneigt sind, darbietet[1]. Die von dem Quarzkeil herrührenden Interferenzstreifen sind im Haupttheil der Alaunplatte nach der Keilkante zu, in der schmalen Lamelle von letzterer hinweg verschoben, entsprechend dem angegebenen Sinne der anomalen Doppelbrechung.

Das Prisma enthält in der Nähe seiner Endflächen noch Theile, die anderen Sectoren des oktaëdrischen Krystalls angehören, als die bisher betrachteten zwei Hälften des Prismas. Demgemäss sind auf den Würfelflächen zwei durch sehr schmale isotrope Streifen, die gegen die Längsrichtung unter 45^0 geneigt sind, begrenzte Eckfelder sichtbar, welche ebenfalls parallel den langen Prismenkanten auslöschen, aber entgegengesetzten Charakter der (übrigens gleich starken) Doppelbrechung haben, wie das Mittelfeld, weil in ihnen die Projection der optischen Axe (oder der Hauptschnitt) parallel den langen

[1] Die rechte obere Ecke des Prismas war nach Beendigung der Druckversuche abgestossen.

Kanten ist. Auf den Dodekaëderflächen zeigen sich vier Eckfelder mit verwaschenen Begrenzungen und unter ca. $\pm 35^0$ gegen die Längsrichtung geneigten Auslöschungsrichtungen, welche letzteren übrigens ziemlich veränderliche Lage besitzen. Beobachtungen über das Verhalten der Eckfelder bei Compression des Prismas wurden nicht angestellt, abgesehen von der Wahrnehmung, dass sich in den zuletzt erwähnten vier Eckfeldern die Schwingungsrichtungen, welche nach den Ecken zu gerichtet waren und also mit der ursprünglichen optischen Axe dieser Felder zusammenfielen, durch Wirkung des Druckes etwas gegen die Druckrichtung (Längsrichtung des Prismas) hin drehten, — wie es die Theorie erfordert.

Nachstehend sind die Resultate der Compensatormessungen mit Na-Licht an dem beschriebenen Prisma, welche zur Bestimmung der Constanten $\frac{a}{v^2}$ und $\frac{b}{v^2}$ dienen, angegeben. Der zur Berechnung erforderliche Brechungsindex des Ammoniakalauns für die D-Linie wurde nach Soret = 1,459 angenommen.

Compensator-Messungen an Prisma I.

Würfelfläche, B = 3,78 mm.

	L. Rd.	M.	R. Rd.		
Q = 1873 g	0,944	1,124	1,235	$\delta = 1{,}114$	$\delta_{p=1} =$ 0,000601,
	1,165	1,050	1,167		
Q = 936 g	0,601	0,632	0,583	$\delta = 0{,}569$	$\frac{b}{v^2} = -0{,}774 \cdot 10^{-8}$.
	0,470	0,546	0,579		

Dodekaëderfläche, B = 4,99 mm.

	L. Hälfte.	R. Hälfte.		
Q = 936 g	1,575	1,367	$\delta = 1{,}441$	$\frac{a+b}{2v^2} = -2{,}618 \cdot 10^{-8}$.
	1,60	1,304		
	1,555	1,324		
	1,342	1,459		

Es ergibt sich demnach für Natriumlicht:

$$\frac{b}{v^2} = -\mathbf{0{,}774 \cdot 10^{-8}}, \quad \frac{a}{v^2} = -\mathbf{4{,}462 \cdot 10^{-8}},$$

$$\frac{b}{a} = +\mathbf{0{,}1734}.$$

Danach ist a etwa von derselben Grösse, b dagegen erheblich grösser, wie für Kalialaun.

Zur Controle und zur Prüfung der oben entwickelten Theorie für die Superposition der natürlichen und künstlich

erzeugten Doppelbrechung wurde noch ein zweites Prisma untersucht, dessen eines (schmaleres) Seitenflächenpaar parallel einer Oktaëderfläche — und zwar der grössten Fläche eines dicktafelförmig entwickelten oktaëdrischen Krystalls — und dessen anderes (breiteres) Seitenflächenpaar parallel einer zu letzterer senkrechten Dodekaëderfläche war, so dass also die Richtung der langen Kanten und somit die Druckrichtung mit einer Höhenlinie (Symmetrielinie) jener Oktaëderfläche zusammenfiel. Seine Orientirung gegen die Würfelnormalen ist in der (ebenfalls zweifach vergrösserten) Taf. VI Fig. 3 dargestellt. Dieses Prisma zeigte demgemäss auf den schmalen Seitenflächen die bekannte Theilung in sechs, den Begrenzungslinien der ursprünglichen Oktaëderfläche entsprechende Sectoren mit um je 60° verschiedener Lage der Schwingungsrichtungen und nach der gemeinsamen Spitze hin abnehmender Stärke der Doppelbrechung; jedoch nahmen die beiden Sectoren (a, a′), in welchen die Polarisationsrichtung der langsameren Welle parallel den langen Prismenkanten liegt, den weitaus grössten Theil der Prismenfläche ein, und von den übrigen erschienen namentlich zwei (b, b′) nur eben angedeutet. (Vergl. Taf. VI Fig. 4 u. 5, die durch photographische Aufnahme des Bildes hergestellt sind, welches das Prisma auf $\bar{1}11$ im weissen Lichte zwischen gekreuzten Nicols bei Combination mit einem Gypsblättchen vom Roth erster Ordnung zeigt; die Schwingungsrichtungen des Gypsblättchens bilden in Fig. 4 mit denjenigen der Sectoren a, a′, in Fig. 5 mit denjenigen von b und c′ Winkel von 45°, so dass diese Sectoren mit derselben Intensität erscheinen, wie das Gypsblättchen allein neben dem Prisma.) Die Begrenzungslinien der einzelnen Sectoren waren sehr wenig scharf. Die Umgebung des Mittelpunktes (Vereinigungspunktes aller Sectoren) war natürlich fast isotrop, da dort in der ganzen Dicke des Prismas die optische Axe senkrecht zu der betrachteten Prismenfläche $\bar{1}11$ ist, entsprechend dem von der grössten Oktaëderfläche des ursprünglichen Krystalles ausgehenden Sector.

Die relative Verzögerung in Folge der natürlichen Doppelbrechung betrug in den mittleren Sectoren im Maximum (d. i. nahe den Enden des Prismas) 0,263 bezw. 0,333 Wellenlängen, in den seitlichen Sectoren c und c′ (nahe am Rande der Fläche)

0,172 bis 0,248 Wellenlängen (für mittleres „weisses“ Licht gemessen, aber jedenfalls auch nahezu für Na-Licht geltend). Compensatormessungen konnten nur in den grossen Sectoren a, a′ ausgeführt werden. Dieselben ergeben direct die durch den Druck erzeugte relative Verzögerung, als ob keine natürliche Doppelbrechung vorhanden wäre, weil aus Symmetriegründen die Lage der Schwingungsrichtungen unverändert parallel und senkrecht zur Druckrichtung bleibt. Beobachtet wurden bei zwei verschiedenen Aufstellungen des Prismas an einer Anzahl vertical untereinanderliegender Stellen der Mittellinie der 3,96 mm breiten Oktaëderflächen die folgenden Streifenverschiebungen:

$$Q = 936\,g \left\{ \begin{array}{cccc|cc} 1{,}607 & & 1{,}447^{*} & & 1{,}413 & 1{,}479 \\ 1{,}475 & 1{,}382 & & 1{,}494 & 1{,}511 & 1{,}465 \end{array} \right\} \delta = 1{,}472.$$

Hieraus folgt nach Formel 4), wenn ω_2 und ω_1 die Geschwindigkeiten der senkrecht bezw. parallel zur Druckrichtung polarisirten Wellen sind:

$$C_1 = \frac{\omega_2^{\,2} - \omega_1^{\,2}}{p\,v^2} = 2{,}13 \,.\, 10^{-8}.$$

Die Theorie ergibt für diese Grösse gemäss den Gleichungen 6):

$$C_1 = \frac{-\,b}{v^2} \left\{ \frac{\sin\chi \cos^3(\vartheta - \chi)}{\sin\vartheta} - \frac{\sin\chi \sin^3(\vartheta - \chi)}{\cos\vartheta} \right\},$$

worin hier für χ der Neigungswinkel einer Oktaëderfläche gegen eine Würfelnormale, also der Winkel $35^0\,16'$ zu setzen ist. Letztere Specialisirung hat, wenn man noch die Formel 5) berücksichtigt, zur Folge, dass

$$C_1 = -\,\frac{a + 2b}{3v^2}$$

wird und somit durch Einsetzen der oben aus den Beobachtungen am Prisma I abgeleiteten Werthe von a und b:

$$C_1 = 2{,}00 \,.\, 10^{-8},$$

welcher Werth befriedigend mit dem beobachteten übereinstimmt.

In den grösseren seitlichen Sectoren c, c′, in welchen die Polarisationsrichtung der langsameren Welle ursprünglich

* Diese Zahl ist am sichersten, daher mit doppeltem Gewicht berücksichtigt.

Winkel von $\pm 60^0$ mit der Druckrichtung bildete, wurde bei der Belastung von 936 g eine Abnahme jenes Winkels um 6^0 bezw. $8\frac{1}{2}^0$ beobachtet. Auf diese Drehung der Schwingungsrichtungen findet die Formel 8') Anwendung, in welcher $\Phi = 60^0$, $\delta^0 = 4{,}1$ bis 5.9 (das sind die Grenzwerthe des ursprünglichen Gangunterschiedes ausgedrückt in Compensator-Umdrehungen) und $p \cdot \delta_1 = 1{,}47 \cdot \frac{2{,}00}{2{,}13} = 1{,}39$ zu setzen ist. Diese Berechnung ergibt für φ die Grenzen $+ 6\frac{1}{2}^0$ und $+ 9\frac{3}{4}^0$. Das Vorzeichen entspricht dem beobachteten Drehungssinne, und die absolute Grösse der berechneten Drehung stimmt ebenfalls mit der Beobachtung soweit überein, als dies bei ihrer Veränderlichkeit von Ort zu Ort überhaupt möglich ist.

Auf den zur Dodekaëderfläche $\bar{1}10$ parallelen, breiteren Seitenflächen des Prismas ist derjenige Sector vorherrschend, welcher die Fläche $\bar{1}11$ zur Basis, und den Mittelpunkt der Auflagerungsfläche des Krystalls zur Spitze hat (*a* in Fig. 6, welche das mit einem Gypsblättchen vom Roth 1. Ordnung, dessen Schwingungsrichtungen horizontal und vertical liegen, combinirte Prisma, auf der Fläche $\bar{1}10$ gesehen, darstellt). Die optische Axe, also die Polarisationsrichtung der langsameren Welle, liegt in ihm senkrecht zu den langen Prismenkanten. Die zwei Ecken des Prismas, welche der Auflagerungsfläche zugewandt waren, werden von zwei anderen Sectoren eingenommen, deren Basisflächen die beiden anderen zur betrachteten Seitenfläche senkrechten Oktaëderflächen waren, und in denen demgemäss die Polarisationsrichtung der langsameren Welle ungefähr $19\frac{1}{2}^0$ mit der Längsrichtung des Prismas bildet (vergl. die dreieckigen Felder *b*, *b'* in Fig. 6). Die Stärke der natürlichen Doppelbrechung ist in allen drei Sectoren nahezu constant, und zwar wurde der Gangunterschied $= 0{,}51\ \lambda$ im Mittelfeld, $= 0{,}495\ \lambda$ und $0{,}50\ \lambda$ in den Eckfeldern gefunden. Das grösste Eckfeld ist vom Mittelfeld durch einen unregelmässig, aber scharf begrenzten, einfach brechenden Streifen (*c* in Fig. 6) getrennt, dessen Längserstreckung etwa der Richtung einer Würfelnormale (durch die punktirte Linie angedeutet) entspricht. Wahrscheinlich hatte derselbe eine kleine Würfelfläche des Krystalls zur äusseren Begrenzung.

In diesem einfach brechenden Streifen wurde, wenn das Prisma comprimirt war, eine Auslöschungsschiefe von ungefähr 26^0 beobachtet; in Fig. 6 ist die entsprechende Schwingungsrichtung der langsameren Welle eingetragen, welche um 26^0 in demselben Sinne gegen die Druckrichtung geneigt ist, in welchem die oben erwähnte Würfelnormale von der letzteren um $35^0\,16'$ abweicht. Die Theorie ergibt nach Formel 5), worin $\chi = 35^0\,16'$ zu setzen ist, $\vartheta = 9^0\,34'$ und somit die Auslöschungsschiefe $\chi - \vartheta = 25^0\,42'$, in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung. Es konnten nun an einer geeigneten, der verticalen Mittellinie der Prismenfläche nahe liegenden Stelle des Streifens c auch Compensatormessungen ausgeführt werden, nachdem der Compensator um 64^0 aus seiner gewöhnlichen Stellung (um die der Beobachtungsrichtung parallele Axe) gedreht worden war, so dass seine Schwingungsrichtungen mit jenen an der betrachteten Stelle des comprimirten Prismas zur Deckung gelangten. Bei zwei verschiedenen Aufstellungen des Prismas wurde im Mittel gemessen:

$$Q = 936\,g \left| \begin{matrix} 1{,}249 \\ 1{,}375 \end{matrix} \right| \delta = 1{,}312.$$

Daraus ergibt sich nach Gleichung 4), worin $B = 4{,}695$ zu setzen ist,

$$C_2 = \mathbf{2{,}245\,.\,10^{-8}}.$$

Der Theorie zufolge muss sein (vergl. die Formeln 6)

$$C_2 = \frac{\omega_z^{\,2} - \omega_y^{\,2}}{p\,v^2} = -\frac{b}{v^2}\,\frac{\sin 2\chi}{\sin 2\vartheta} = -\frac{b}{v^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3\sin 19^0\,8'} = \mathbf{2{,}227\,.\,10^{-8}};$$

die Differenz beider Werthe ist erheblich kleiner, als die Beobachtungsfehler.

Um von einem etwaigen Fehler in der Messung der Auslöschungsschiefe unabhängig zu sein, wurden auch Beobachtungen bei unveränderter, gewöhnlicher Stellung des Compensators gemacht. In diesem Falle findet man durch die Streifenverschiebung nicht direct die relative Verzögerung der beiden Wellen im Krystall, sondern es besteht, wenn α der Winkel zwischen correspondirenden Schwingungsrichtungen im Compensator und im Krystall ist, zwischen dem Gangunterschied $\triangle$ (ausgedrückt in Theilen einer Wellenlänge) im Kry-

stall und demjenigen $\triangle'$, welcher zur Compensation hinzugefügt werden muss (d. i. also die negative Streifenverschiebung δ' dividirt durch den Streifenabstand), die Beziehung:

10) $$\operatorname{tg} 2\pi\triangle' = -\frac{\cos 2\alpha \,.\, \sin 2\pi\triangle}{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha \,.\, \cos 2\pi\triangle}.$$

(Man findet durch eine einfache Rechnung für die Intensität des durch den Polarisator, den Compensator, die Krystallplatte und den Analysator hindurchgegangenen Lichtes, vorausgesetzt, dass die Schwingungsrichtungen in den gekreuzten Nicols $\pm 45^0$ mit denen im Compensator bilden, den Ausdruck

$$I = 1 - \sin^2 2\alpha \cos 2\pi\triangle'$$
$$+ \cos 2\alpha(\sin 2\pi\triangle \sin 2\pi\triangle' - \cos 2\alpha \cos 2\pi\triangle \cos 2\pi\triangle'),$$

und dieser wird ein Minimum, d. h. es erscheint ein schwarzer Streifen, für den durch Gleichung 10) bestimmten Werth von $\triangle'$. Dieses Minimum ist aber nicht $= 0$, daher der Streifen im Compensator nicht absolut dunkel, wie es bei zusammenfallenden Schwingungsrichtungen des Compensators und Krystalles der Fall ist.)

Im vorliegenden Falle ist, wie oben angegeben, nach der Theorie $\alpha = 25^0\,42'$ und $\triangle = \frac{1{,}312}{23{,}81} \cdot \frac{2{,}227}{2{,}245} = 0{,}05455$; folglich muss sein $\triangle' = -0{,}0337$ oder $\delta' = +\mathbf{0{,}803}$. Beobachtet wurde an zwei Stellen, von denen die eine etwas rechts, die andere etwas links von der Mittellinie lag: $\delta' = +0{,}834$ und $+0{,}733$, also im Mittel $+\mathbf{0{,}784}$.

Dieselbe Theorie ist anzuwenden auf die Messungen des durch Druck erzeugten Gangunterschiedes im Sector a; denn in demselben sind die Schwingungsrichtungen zwar ursprünglich vertical und horizontal gelegen, können es aber bei der Compression nicht bleiben, weil sie bei wachsendem Drucke der schiefen Lage, welche sie im ursprünglich einfachbrechenden Streifen c besitzen, zustreben müssen. Diese letztere Grenzlage ist nach der oben angestellten Rechnung dadurch bestimmt, dass die Polarisationsrichtung der langsameren Welle mit der Druckrichtung einen Winkel von $25^0\,42'$ einschliesst; ursprünglich liegt aber in dem betrachteten Sector diese Polarisationsrichtung senkrecht zur Druckrichtung, folglich ist der Grenzwerth ihrer Drehung gegen die Längs-

richtung des isotropen Streifens hin: $\Phi = 90^0 - 25^0\,42' = 64^0\,18'$, und die Drehung φ, welche sie durch den Druck p in derselben Richtung erfährt, ist zu berechnen aus der Gleichung:

$$\operatorname{cotg} 2\varphi = \operatorname{cotg} 128^0\,36' + \frac{\delta^0}{\delta_1\, p \sin 51^0\,24'}.$$

Darin ist δ^0 nach der schon erwähnten Beobachtung $= 0{,}51 \,.\, 23{,}81 =$ nahezu 12, und $\delta_1 p$ für $Q = 936$ nach der Theorie (cf. S. 248) $= 1{,}312 \cdot \frac{2{,}227}{2{,}245} = 1{,}30$, für $Q = 1873$ also $= 2{,}60$ zu setzen, und man findet

$$\varphi = 2^0\,35\tfrac{1}{2}' \text{ für } Q = 936 \text{ g}, \quad = 5^0\,32' \text{ für } Q = 1873 \text{ g}.$$

Beobachtet wurde eine Drehung in demselben Sinne von

$$2^0\,22' \text{ für } Q = 936 \text{ g}, \quad 5^0\,20' \text{ für } Q = 1873 \text{ g}.$$

Die Berechnung der Compensatorbeobachtungen im Mittelfelde (a) ist aus dem Grunde etwas complicirter, weil hier der Gangunterschied im comprimirten Krystall nicht einfach die Summe des ursprünglichen und desjenigen ist, welcher durch den Druck allein erzeugt werden würde. Um ihn zu berechnen, muss man auf die Gleichungen 7) zurückgehen. Für die Dodekaëderfläche $\bar{1}10$ oder $1\bar{1}0$, welcher die betrachteten Prismenflächen parallel sind, ist $\mu = \nu$; setzt man $\pi = \cos\vartheta$, also $\mu = \nu = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \sin\vartheta$, so ist die Gleichung der Schnittcurve des Ovaloids mit dieser Ebene:

$$\varrho^2 = \tfrac{1}{2}(B_{11} + B_{22}) \sin^2\vartheta + B_{33} \cos^2\vartheta + \sqrt{2}(B_{23} + B_{31}) \sin\vartheta \cos\vartheta + B_{12} \sin^2\vartheta.$$

Da nach unserer Festsetzung die Druckrichtung (Längsrichtung des Prismas) im ersten Oktanten liegt, also die Richtungscosinus $\sqrt{\tfrac{1}{6}}, \sqrt{\tfrac{1}{6}}, \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ hat, so ist $X_x = Y_y = X_y = \tfrac{1}{6} p$, $Y_z = Z_x = \tfrac{1}{3} p$, $Z_z = \tfrac{2}{3} p$ und somit nach 7′)

$$\tfrac{1}{2}(B_{11} + B_{22}) = {\omega_0}^2 + d - c\,p - \tfrac{1}{6} a\,p,$$
$$B_{33} = {\omega_0}^2 + d - c\,p - \tfrac{2}{3} a\,p,$$

ferner, da dann im betrachteten Sector, so lange kein Druck wirkt, die optische Axe im 4. Oktanten liegt,

$$B_{23} = B_{31} = -d - \tfrac{1}{3} b\,p, \quad B_{12} = +d - \tfrac{1}{6} b\,p.$$

Hiernach nimmt obige Gleichung die Form an:

$$\varrho^2 = {\omega_0}^2 + 2d - c\,p - \tfrac{1}{6}(a + b)\,p - (d + \tfrac{1}{2} a\,p - \tfrac{1}{6} b\,p) \cos^2\vartheta$$
$$- \sqrt{2}\,(d + \tfrac{1}{3} b\,p) \sin 2\vartheta.$$

Die Richtungen, für welche ϱ^2 oder ω^2 ein Maximum und Minimum wird, d. h. die Auslöschungsrichtungen, bilden mit der Längsrichtung des Prismas und der zu ihr senkrechten einen kleinen, vom Drucke p abhängigen Winkel α_p, welcher oben (S. 250) bereits für die Belastungen 936 g und 1873 g berechnet wurde; (dort ist derselbe mit φ bezeichnet, hier ist dafür α_p geschrieben, um die Bezeichnung mit derjenigen in Formel 10) in Einklang zu bringen).

Da nun für die Druckrichtung selbst ϑ den Werth $35^0\,16'$ hat, so ist für das Minimum und Maximum von ϱ:

$$\vartheta = 35^0\,16' + \alpha_p \text{ und } = 125^0\,16' + \alpha_p.$$

Somit ergeben die Quadrate der beiden Lichtgeschwindigkeiten senkrecht zur betrachteten Fläche nach der Compression die Differenz:

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (d + \tfrac{1}{2}ap - \tfrac{1}{6}bp)\cos(70^0\,31\tfrac{1}{2}' + 2\alpha_p) + 2\sqrt{2}(d + \tfrac{1}{3}bp)\sin(70^0\,31\tfrac{1}{2}' + 2\alpha_p). \quad 11)$$

Hieraus ist nun $\triangle$, d. i. der wirkliche Gangunterschied der beiden Wellen im Krystall, zu berechnen:

$$\triangle = \frac{Dn^3}{2\lambda}\,\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{v^2}.$$

Ist der Compensator vor der Compression eingestellt worden, so hat man, da dann $\alpha_p = 0$ ist, $\triangle' = -\triangle_{p=0}$ gemacht. Letzterer Werth ist aber nach 11) $= \frac{-Dn^3}{2\lambda v^2} \cdot 3d$, und der Beobachtung zufolge $=$ nahezu $\frac{-1}{2}$, folglich ist $\frac{Dn^3}{2\lambda v^2} \cdot d = \frac{1}{6}$. Durch Einsetzung dieses Werthes und derjenigen für a, b, α_p und p in 11) kann man nun $\triangle$ für den durch die Belastung 936 g erzeugten Druck, bei welchem $\triangle'$ gemessen wurde, berechnen und findet

$$\triangle_{Q=936} = 0{,}4678.$$

Endlich ergibt sich aus 10), worin $\alpha = 2^0\,35\frac{1}{2}'$ zu setzen ist,

$$\triangle'_{Q=936} = -0{,}46812.$$

Folglich ist der theoretische Werth der am Compensator zu messenden Streifenverschiebung:

$$\delta' = (0{,}5000 - 0{,}4681) \,.\, 23{,}81 = \mathbf{0{,}7605}.$$

Beobachtet wurde

bei einer ersten Aufstellung des Prismas, in der Mitte des Sectors (a): 0,860,

bei einer zweiten Aufstellung, rechts und links von der Mitte: 0,798 bezw. 0,688,

im Durchschnitt also **0,801**.

Auch hier ist die Übereinstimmung so gut, wie es in Anbetracht der unsicheren Einstellungen möglich war.

Schliesslich wurden noch einige Beobachtungen über die Auslöschungsrichtungen der Eckfelder (b, b′) angestellt. Dieselben ergaben, dass sich die ursprünglich unter ca. $19\frac{1}{2}^0$ gegen die Druckrichtung geneigte Polarisationsrichtung der langsameren Welle (die in Fig. 6 eingetragen ist) um 3 bis 4^0 gegen die Druckrichtung hin drehte bei der Belastung des Hebels mit 936 g. Die Formel 9), in welcher für diese Sectoren $\Phi = 19^0\,29' + 25^0\,42' = 45^0\,11'$, $\delta^0 = 11{,}85$, $\delta_1\,\mathrm{p} = 1{,}30$ zu setzen ist, führt auf eine Drehung φ von $3^0\,8'$ in demselben Sinne. —

Alles in Allem genommen hat sich also die Theorie sowohl für die durch Druck allein erzeugte Doppelbrechung, als für die Modification der schon von Natur vorhandenen, beim Ammoniakalaun gut bestätigt, und es scheint demnach die Annahme, dass auch die optisch anomalen Alaunkrystalle sich hinsichtlich der optischen Wirkung von Deformationen wie reguläre Krystalle verhalten, zutreffend zu sein. —

Schliesslich will ich noch die Maxima des Winkels der optischen Axen und der Abweichung der 1. bezw. 2. Mittellinie von der Druckrichtung, welche vorkommen, wenn letztere eine Würfel- oder Dodekaëderfläche durchläuft, angeben, wie sie sich aus den im Vorhergehenden zu Grunde gelegten Constanten $\frac{a}{v^2} = -4{,}462 \cdot 10^{-8}$, $\frac{b}{v^2} = -0{,}774 \cdot 10^{-8}$ berechnen. Die Bezeichnungsweise ist dieselbe, welche beim Kalialaun benutzt wurde (S. 234—236). Es ist hier aber zu beachten, dass die mitzutheilenden Zahlen nur für ursprünglich einfachbrechende Krystalle oder Krystalltheile eine unmittelbare Bedeutung besitzen.

1. Druckrichtung parallel einer Würfelfläche.

Maximum der Auslöschungsschiefe $\Phi^1 = 22^0\,22'$ für $\varphi' = 33^0\,41'$.

Maximum des Winkels der opt. Axen $2\Omega^1 = 114^0\,4'$ für $\varphi = 45^0$.

2. Druckrichtung parallel einer Dodekaëderfläche.
   a) $0 < \chi < 54^0\ 44'$.
      Maximum des Axenwinkels $2\Omega^{II} = 45^0\ 55'$ für $\chi^{II} = 48^0\ 55'$.
      Maximum der Auslöschungsschiefe $\Phi^{III} = -26^0\ 49\frac{1}{2}'$ für $\chi^{III} = 40^0\ 13\frac{1}{2}'$.
   b) $54^0\ 44' < \chi < 90^0$.
      Maximum der Auslöschungsschiefe $\Phi^{IV} = 12^0\ 22'$ für $\chi^{IV} = 69^0\ 37'$.

Demnach erreichen die Abweichungen der Mittellinie von der Druckrichtung, sowie der Axenwinkel nicht so grosse Werthe, wie beim Kalialaun, und die Druckrichtungen, für welche diese Grössen ihre Maxima erreichen, liegen den Würfelnormalen näher und von den Oktaëdernormalen entfernter. Es wäre von Interesse, zu untersuchen, ob die isomorphen Mischungen von Kali- und Ammoniakalaun in ihrem optischen Verhalten gegen Druck einen stetigen Übergang zwischen den Endgliedern darbieten, also auch Werthe von a und b besitzen, welche zwischen denjenigen des Kali- und Ammoniakalauns liegen.

Endlich möge noch die naheliegende Frage beantwortet werden, ein wie grosser Druck erforderlich wäre, um einen ursprünglich einfachbrechenden Krystall von Ammoniakalaun ebenso stark doppeltbrechend zu machen, wie es die untersuchten Krystalle von Natur infolge ihrer optischen Anomalien waren. Da die anomalen Krystalle, bezw. deren einzelne Sectoren, sich nach allen Beobachtungen als optisch einaxig mit negativem Charakter der Doppelbrechung und zu den Oktaëderflächen senkrechter optischer Axe erwiesen haben, so würde man eine gleiche Doppelbrechung künstlich erzeugen können durch einseitigen Druck senkrecht zu einer Oktaëderfläche, oder auch, da ein allseitig gleicher Druck die Doppelbrechung nicht ändert, durch in allen Richtungen parallel der Oktaëderfläche gleiche, halb so grosse Zugkräfte (Spannungen), und zwar müssten diese Kräfte sehr genau senkrecht bezw. parallel den Oktaëderflächen wirken, wegen des aus dem kleinen Werthe von $\frac{b}{a}$ folgenden starken Einflusses einer geringen Abweichung von jener Orientirung auf die optischen Eigenschaften (vergl. die Discussion für den Kaliumalaun S. 235 bis 236). Nimmt man also einen Druck von $\bar{p}$ Gramm pro qmm als parallel einer Oktaëdernormale wirksam an, so würde die Differenz der Hauptlichtgeschwindigkeiten durch $b\,\bar{p}$ gegeben

sein. Diese Differenz im natürlich doppeltbrechenden Krystall ist die im Vorhergehenden mit 3 d bezeichnete Grösse; es ist also der gesuchte Druck parallel einer Oktaëdernormale $\bar{p} = \frac{3d}{b}$ oder der Zug in allen Richtungen senkrecht dazu $= \frac{3d}{2b}$. Die Grösse 3 d lässt sich aus dem mit dem Compensator gemessenen Gangunterschied $\triangle$ in den natürlich doppeltbrechenden Sectoren berechnen. Aus dem Werthe von $\triangle = 0{,}51$ für die Dodekaëderflächen des Prismas II, wo die optische Axe senkrecht zur Beobachtungsrichtung liegt, folgt direct $3d = \frac{2\lambda}{n^3 D}\triangle$; für die Dodekaëderflächen des Prismas I, welche mit der optischen Axe einen Winkel von 54° 44′ bilden, ist die Grösse auf der rechten Seite gleich d. Es ergibt sich so $d = 4{,}14 \cdot 10^{-5}$ für Prisma II, $d = 4{,}58 \cdot 10^{-5}$ für Prisma I, im Mittel $= 4{,}36 \cdot 10^{-5}$; folglich wird $\bar{p} = 5625$ g.

Einen solchen Druck dürfte wohl kein Alaunkrystall aushalten, ohne zu zerbrechen (bei meinen Versuchen betrug der grösste Druck nicht ganz 500 g). Indessen ist eine Erklärung der optischen Anomalien durch im fertiggebildeten Krystall wirkende Spannungen ja auch aus mehreren anderen Gründen ausgeschlossen. Man könnte nun annehmen, dass während des Krystallisationsvorganges viel geringere Spannungen genügt hätten, um die beobachtete natürliche Doppelbrechung als dauernde Nachwirkung zu erzeugen. Allein auch dann bleibt der Einwand bestehen, welcher aus der Thatsache der scharfen Grenzen zwischen den Sectoren von verschiedener optischer Orientirung gegen die Spannungshypothese erhoben worden ist[1]. Man kann nach meiner Ansicht über die eigentliche Ursache der Anomalien in solchen Fällen, wie beim Alaun, vorläufig nicht mehr behaupten, als dass unbekannte Molecularkräfte beim Krystallwachsthum geringfügige Störungen der normalen Krystallstructur veranlassen, welche sich durch die anomale Doppelbrechung verrathen, während sie andere, weniger empfindliche physikalische Eigenschaften nicht merklich beeinflussen.

[1] Ein vorzügliches Beispiel hierfür liefert die in Fig. 2 hervortretende scharf abgesetzte Lamelle, in welcher der Sinn der Doppelbrechung der entgegengesetzte ist, wie in den angrenzenden Feldern.

III. Beobachtungen am Beryll.

Um ein Beispiel für die durch elastische Deformationen bedingte Änderung der Doppelbrechung hexagonaler Krystalle, bei welchen diese Erscheinungen nächst den regulären am einfachsten sein müssen, kennen zu lernen, wählte ich den Beryll, weil dessen Elasticitätsconstanten durch die Untersuchung von Herrn Voigt[1] bekannt sind. Leider erwies sich das Material, obwohl verhältnissmässig guten Krystallen entnommen, als optisch zu inhomogen, um die Bestimmung aller Constanten, von denen nach der Theorie die fraglichen Erscheinungen abhängen, möglich zu machen. Immerhin scheinen mir aber auch die unvollständigen Resultate hinreichendes Interesse darzubieten, um sie hier mitzutheilen. —

Aus der Symmetrie des hexagonalen Systems folgt, dass für die Bestimmungsstücke des Fresnel'schen Ovaloids als Functionen der Deformationscomponenten $x_x, \ldots y_z, \ldots$ der Ansatz zu machen ist[2]:

$$
\begin{aligned}
B_{11} - \omega_o{}^2 &= a_{11} x_x + a_{12} y_y + a_{13} z_z, \\
B_{22} - \omega_o{}^2 &= a_{12} x_x + a_{11} y_y + a_{13} z_z, \\
B_{33} - \omega_e{}^2 &= a_{31} x_x + a_{31} y_y + a_{33} z_z, \\
B_{23} = a_{44} y_z,\quad B_{31} &= a_{44} z_x,\quad B_{12} = \tfrac{1}{2}(a_{11} - a_{12}) x_y,
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

worin die fünf Grössen a_{hk} dem Krystall eigenthümliche Constanten (die aber von der Wellenlänge abhängen können) und ω_o, ω_e die ursprünglichen Hauptlichtgeschwindigkeiten bezeichnen. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Z^0-Axe die krystallographische Hauptaxe ist; die X^0- und Y^0-Axe können in der zu letzterer senkrechten Ebene beliebig angenommen werden, weil alle gegen die Hauptaxe gleich geneigten, insbesondere also alle zu ihr senkrechten Richtungen sowohl optisch als elastisch gleichwerthig sind.

Soweit es sich nur um die Änderungen der Doppelbrechung, also um die Richtungen der optischen Symmetrieaxen und die Differenzen der Hauptbrechungsindices, nicht um die absoluten Lichtgeschwindigkeiten handelt, ist das Ver-

[1] W. Voigt, Ann. d. Phys. N. F. **31**. 474. 1887 u. dies. Jahrb. Beil.-Bd. **5**. 68. 1887.

[2] F. Pockels, Ann. d. Phys. N. F. **37**. 161. 1889 u. dies. Jahrb. 1890. I. -197-.

halten bei beliebiger Deformation durch die vier Grössen: $a_{11} - a_{31}$, $a_{12} - a_{31}$, $a_{33} - a_{13}$, a_{44} bestimmt, welche durch Compensatorbeobachtungen an drei Prismen, deren Längsrichtungen unter verschiedenen Winkeln (etwa 0, 45°, 90°) gegen die Hauptaxe geneigt sind, gefunden werden können. Die Bestimmung von a_{31} und a_{13} mittelst Messung der absoluten Verzögerungen der Wellen im Krystall war durch die inhomogene Beschaffenheit der untersuchten Krystalle (worüber unten Näheres gesagt werden wird) von vornherein ausgeschlossen. Da ich aber bald sah, dass auch die Compensatormessungen nicht den wünschenswerthen Grad der Genauigkeit erreichten, so beschränkte ich mich auf die Untersuchung der parallel und senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Prismen, welche zuerst angefertigt worden waren, und verzichtete somit auf die Bestimmung der Constanten a_{44}; letztere schien mir übrigens auch ein geringeres Interesse darzubieten, als die Grössen $a_{11} - a_{31}$, $a_{12} - a_{31}$, $a_{13} - a_{33}$, welche die Änderungen der Doppelbrechung in allen denjenigen Fällen allein bestimmen, wo eine Hauptdruckaxe mit der krystallographischen Hauptaxe zusammenfällt.

Die Bestimmung jener drei Constanten aus Compensatormessungen an den erwähnten beiden Arten von Prismen, die longitudinalem Druck unterworfen werden, gestaltet sich wie folgt:

Wirkt ein Druck p senkrecht zur Hauptaxe, etwa parallel der Y^0-Axe, so ist[1]

$$x_x = -p s_{12}, \quad y_y = -p s_{11}, \quad z_z = -p s_{13}, \quad y_z = z_x = x_y = 0,$$

folglich nach 12), worin $B_{11} = \omega_x^2$, $B_{22} = \omega_y^2$, $B_{33} = \omega_z^2$ wird, weil die Axen X, Y, Z mit X^0, Y^0, Z^0 zusammenfallen,

---

[1] Die Grössen s_{hk} sind die „Elasticitätsmoduln" nach Voigt's Bezeichnung, mit deren Hilfe sich die Deformationen durch die Druckcomponenten im hexagonalen Systeme folgendermaassen ausdrücken:

$$\begin{aligned} x_x &= -s_{11} X_x - s_{12} Y_y - s_{13} Z_z, \\ y_y &= -s_{12} X_x - s_{11} Y_y - s_{13} Z_z, \\ z_z &= -s_{13}(X_x + Y_y) - s_{33} Z_z, \\ y_z &= -s_{44} Y_z, \quad z_x = -s_{44} Z_x, \\ x_y &= -2(s_{11} - s_{12}) X_y. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\omega_x^2 &= \omega_o{}^2 - p(a_{11}s_{12} + a_{12}s_{11} + a_{13}s_{13}),\\
\omega_y^2 &= \omega_o{}^2 - p(a_{12}s_{12} + a_{11}s_{11} + a_{13}s_{13}),\\
\omega_z^2 &= \omega_e{}^2 - p(a_{31}(s_{11} + s_{12}) \quad + a_{33}s_{13}),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Dagegen ist bei parallel zur Hauptaxe ausgeübtem Drucke p:

$$
\begin{aligned}
x_x = y_y &= -ps_{13}, \quad z_z = -ps_{33},\\
\omega_x^2 = \omega_y^2 &= \omega_o{}^2 - p((a_{11} + a_{12})s_{13} + a_{13}s_{33}),\\
\omega_z^2 &= \omega_e{}^2 - p(2a_{31}s_{13} + a_{33}s_{33}).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Im ersteren Falle findet man aus dem in der Richtung der Z^0-Axe gemessenen Gangunterschied $\triangle$ $\left(\text{in Wellenlängen ausgedrückt, also} = \frac{\delta}{23{,}81}\right)$ die Differenz $\omega_y^2 - \omega_x^2$ direct aus der Gleichung

$$\frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{v^2} = +\frac{2\lambda}{n_o^3} \cdot \frac{\triangle}{D},$$

worin n_o der Brechungsindex des ordentlichen Strahles, D die Dicke des Prismas in der Beobachtungsrichtung ist und $\triangle$ positiv zu rechnen ist, wenn eine Verzögerung der parallel zur Druckrichtung polarisirten Welle gegen die andere eintritt (wie es bei den meisten bisher untersuchten Körpern, und so auch stets beim Beryll, der Fall ist).

Bezeichnet man die auf diesen Fall bezüglichen Grössen mit dem Index 1, so erhält man also:

$$\left(\frac{a_{11} - a_{12}}{v^2}\right)(s_{11} - s_{12}) = -C_1 = -\frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{pv^2} = -\frac{2\lambda}{n_o^3} \cdot \frac{B_1}{\nu Q} \cdot \triangle_1. \tag{15}$$

Auf dem anderen, zur Hauptaxe parallelen und zur X^0-Axe senkrechten Flächenpaar desselben Prismas wird man eine andere Verzögerung $\triangle_2$ beobachten; dieselbe ist aber nicht direct durch $\omega_y^2 - \omega_z^2$ gegeben, wie $\triangle_1$ durch $\omega_y^2 - \omega_x^2$, sondern sie enthält noch denjenigen Gangunterschied, welcher in der Schicht, um welche die Dicke des Prismas in Folge seiner Querdilatation bei der Compression wächst, vermöge der natürlichen Doppelbrechung entsteht. Diese von $\triangle$ zu subtrahirende Correction, welche in allen Fällen, wo in der Beobachtungsrichtung in Folge der natürlichen Doppelbrechung schon ein grosser Gangunterschied vorhanden ist, anzubringen ist, besitzt die Grösse:

$$\frac{D\sigma(n_1 - n_2)}{\lambda},$$

wo σ die Dilatation in der Beobachtungsrichtung und n_1, n_2 die Brechungsindices der parallel bezw. senkrecht zur Druckrichtung polarisirten Welle bezeichnen. Im vorliegenden Falle, wo die Druckrichtung senkrecht zur optischen Axe ist, wird $n_1 = n_e$, $n_2 = n_o$ und $\sigma = x_x = -p s_{12}$. Die Correction beträgt beim Beryll in Folge seiner sehr schwachen Doppelbrechung nur einen Bruchtheil von 1 Procent und ist gegen die Beobachtungsfehler sehr klein; bei stark doppeltbrechenden Krystallen würde sie aber keineswegs zu vernachlässigen sein.

Setzt man die durch 13) gegebenen Werthe ω_y^2 und ω_z^2 ein, so ergibt sich:

$$16) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{a_{31}-a_{12}}{v^2} s_{12} + \dfrac{a_{31}-a_{11}}{v^2} s_{11} + \dfrac{a_{33}-a_{13}}{v^2} s_{13} \\ = C_2 = \dfrac{\omega_y^2 - \omega_z^2 - {\omega_o}^2 + {\omega_e}^2}{p v^2} = \dfrac{2\lambda}{{n_m}^3} \cdot \dfrac{B_2}{\nu Q} \cdot \triangle_2 + 2 s_{12} \dfrac{{n_e}^0 - {n_o}^0}{{n_m}^3}, \end{array} \right.$$

worin n_m einen Mittelwerth zwischen n_e und n_o, hier mit hinreichender Annäherung $\dfrac{n_e + n_o}{2}$, bezeichnet.

Ist zweitens die Druckrichtung parallel der Hauptaxe, so beobachtet man in allen zu ihr senkrechten Richtungen eine relative Verzögerung $\triangle_3$, welche, vermehrt um $\dfrac{D\sigma({n_e}^0 - {n_o}^0)}{\lambda}$ $= \dfrac{-Dps_{13}({n_e}^0 - {n_o}^0)}{\lambda}$, durch $\dfrac{\omega_z^2 - \omega_x^2}{v^2}$ oder $\dfrac{\omega_z^2 - \omega_y^2}{v^2}$ nach 14) gegeben ist. Die Correction wegen der Dickenänderung ist hier positiv (wie $-s_{13}$), weil die optische Axe, umgekehrt wie im vorigen Falle, parallel der Druckrichtung liegt; ferner ist die Querdilatation jetzt durch s_{13} statt durch s_{12} bestimmt. Man erhält somit:

$$17) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{a_{11} + a_{12} - 2a_{31}}{v^2} s_{13} + \dfrac{a_{13} - a_{33}}{v^2} s_{33} = C_3 = \dfrac{\omega_z^2 - \omega_x^2 - {\omega_e}^2 + {\omega_o}^2}{p v^2} \\ = \dfrac{2\lambda}{{n_m}^3} \dfrac{B_3}{\nu Q} \triangle_3 - 2 s_{13} \dfrac{{n_e}^0 - {n_o}^0}{{n_m}^3}. \end{array} \right.$$

Für die aus den Compensatorbeobachtungen bestimmbaren Constantencombinationen mögen folgende abgekürzte Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\frac{a_{11} - a_{31}}{v^2} = a_1, \quad \frac{a_{12} - a_{31}}{v^2} = a_2, \quad \frac{a_{33} - a_{13}}{v^2} = a_3.$$

Dann hat man zu deren Berechnung aus den beobachteten Grössen C_1, C_2, C_3 und den Elasticitätsmoduln nach 15), 16), 17) die drei linearen Gleichungen:

$$18) \quad \left| \begin{array}{lll} a_1(s_{11}-s_{12}) - a_2(s_{11}-s_{12}) & & = -C_1, \\ a_1 s_{11} + a_2 s_{12} & - a_3 s_{13} & = -C_2, \\ a_1 s_{13} + a_2 s_{13} & - a_3 s_{33} & = +C_3, \end{array} \right.$$

deren Auflösung ergibt:

$$18') \quad \left| \begin{array}{l} S \cdot a_1 = -C_1(s_{12}s_{33} - s_{13}^2) - C_2 s_{33}(s_{11}-s_{12}) - C_3 s_{13}(s_{11}-s_{12}), \\ S \cdot a_2 = +C_1(s_{11}s_{33} - s_{13}^2) - C_2 s_{33}(s_{11}-s_{12}) - C_3 s_{13}(s_{11}-s_{12}), \\ S \cdot a_3 = +C_1 s_{13}(s_{11}-s_{12}) - 2C_2 s_{13}(s_{11}-s_{12}) - C_3(s_{11}^2 - s_{12}^2), \\ S = (s_{11}-s_{12})\{(s_{11}+s_{12})s_{33} - 2s_{13}^2\}. \end{array} \right.$$

Hierin sind schliesslich die Zahlenwerthe der Elasticitätsmoduln einzusetzen, welche nach den Bestimmungen von Herrn Voigt sind:

$$s_{11} = 4{,}325 \cdot 10^{-8}, \quad s_{12} = -1{,}338 \cdot 10^{-8}, \quad s_{13} = -0{,}836 \cdot 10^{-8},$$
$$s_{33} = 4{,}62 \cdot 10^{-8}.$$

Diese Werthe können wohl mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit auch für den von mir untersuchten Beryll angenommen werden, da derselbe von demselben Fundorte (vom Adun-Tschilon bei Nertschinsk) stammt, wie derjenige, für welchen Herr Voigt die Elasticitätsconstanten bestimmt hat. —

Es wurden für meine Untersuchung von den Herren Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H. aus einem lichtgrünen prismatischen Krystall von fast 2 cm Durchmesser drei rechtwinklige Prismen (eigentlich Parallelepipeda) mit zur krystallographischen Hauptaxe senkrechter Längsrichtung (Gattung I, Taf. VI Fig. 7) und aus einem kleineren, ähnlichen Krystall ein solcher mit zur Hauptaxe paralleler Längsrichtung (No. II, Taf. VI Fig. 11) hergestellt. Die Lage der zur Hauptaxe senkrechten Kanten war in beiden Fällen unbestimmt gelassen, da ja alle solchen Richtungen unter einander optisch und elastisch gleichwerthig sind. Nach Herstellung der Prismen erwies sich leider das Material in noch höherem Grade inhomogen, als die ganzen Krystalle erwarten liessen. Einmal waren die Krystalle von kleinen Sprüngen und Einschlüssen so erfüllt, dass dieselben auch bei Anfertigung der Prismen, namentlich der Gattung I, nicht ganz vermieden werden konnten; doch waren sie in denjenigen Prismen, die zur

definitiven Untersuchung gelangten, wesentlich auf die Enden beschränkt und daher wohl nicht von erheblich störendem Einfluss.

Aber auch die von Sprüngen und Einschlüssen ganz freien Partien der Krystalle waren optisch inhomogen, und zwar aus sehr dünnen, zur Hauptaxe senkrechten Schichten von wechselnden Brechungsindices aufgebaut. Diese Schichten sind schon im gewöhnlichen Lichte durch die Verschiedenheit ihrer Brechungsindices deutlich zu erkennen; bei hinreichend schiefem Einfall des Lichtes tritt sogar an manchen Schichten im Innern des Krystalls totale Reflexion ein, und zwar in gleicher Weise im natürlichen, wie im senkrecht oder parallel zur Hauptaxe polarisirten Lichte, woraus folgt, dass die Unterschiede der Schichten sich auf beide Hauptbrechungsindices erstrecken. Sehr auffallend treten die Schichten bei Beobachtung senkrecht zur optischen Axe im homogenen parallelen polarisirten Lichte hervor, da sie dann wegen des verschiedenen Gangunterschiedes der beiden Wellen in verschiedener Helligkeit erscheinen. Die nach Photographien im Natriumlicht hergestellten Fig. 8 und 12 (Taf. VI) zeigen den Anblick, welchen die Prismen I und II unter den eben erwähnten Umständen darbieten. (Die hellen Streifen am unteren Ende von Fig. 12 rühren von der erwähnten Totalreflexion her.) Noch deutlicher wird die von Schicht zu Schicht wechselnde Stärke der Doppelbrechung sichtbar, wenn man die Prismen mit einem Quarzkeil mit zur optischen Axe senkrechter brechender Kante so combinirt, dass letztere senkrecht zu den Schichten im Beryll steht, und die gekreuzten Nicols unter $\pm 45^0$ gegen diese Richtungen stellt (natürlich bei Beleuchtung mit homogenem Licht); die schwarzen Interferenzstreifen, welche normaler Weise parallel der Keilkante verlaufen würden, erscheinen dann da, wo das Beryllprisma vor dem Keile steht, vielfach hin und her geknickt, und zwar alle Streifen in ungefähr derselben Weise, woraus ersichtlich ist, dass in jeder Schicht die Doppelbrechung constant ist. Diese Störung der Streifen, welche in Fig. 9 zur Darstellung gelangt ist, macht sich natürlich in gleicher Weise bei Anwendung des Compensators geltend und erschwert die Messungen ausserordentlich, da nur kurze Strecken der Compensatorstreifen

einen hinreichend geradlinigen Verlauf besitzen, um eine Einstellung zu ermöglichen. Der Compensator musste übrigens immer so gestellt werden, dass seine Streifen senkrecht zu den Schichten des Berylls (also wie bei der durch Fig. 9 dargestellten Combination) verliefen; denn falls sie den letzteren parallel waren, erlitten sie wegen der grossen Feinheit der Schichten bei der geringsten Verschiebung des Auges störende Veränderungen. In der Richtung der optischen Axe betrachtet, zeigen die Prismen (I) im parallelen homogenen polarisirten Lichte unregelmässige helle Flecke, wie es die Fig. 10 veranschaulicht. Ein derartiges „marmorirtes" Aussehen von Beryllplatten senkrecht zur Axe erwähnen auch E. Mallard [1] und R. Brauns [2], während der schichtenförmige Bau meines Wissens noch nicht beschrieben worden ist. Im convergenten Lichte war natürlich auch das einaxige Interferenzbild gestört, doch traten die dunklen Hyperbeln an allen Stellen der Platte nur wenig auseinander. Die Compensatorbeobachtungen waren in Folge dieser Anomalien auch in der Richtung der Hauptaxe sehr schwierig und nur mit geringer Genauigkeit ausführbar.

Nachstehend sind die Beobachtungsresultate und die daraus (mit Benutzung der Brechungsindices $n_e = 1{,}57565$, $n_o = 1{,}58208$ nach Schrauf) abgeleiteten Werthe C_1, C_2, C_3 zusammengestellt. Die Belastung Q betrug immer 1873 g.

Prismen der Gattung I. Druckrichtung die Y°-Axe.

Beobachtungsrichtung die Z°-Axe.

Ia. $B_1 = 4{,}05$ mm.		Ib. $B_1 = 4{,}00$ mm.	
L. Rd.	R. Rd.	M.	R. Rd.
1,88	1,61	1,59	1,60

Mittel: $\delta_1 = 1{,}745$ 1,59.

$$C_1 = +\,0{,}968 \,.\, 10^{-8}.$$

Beobachtungsrichtung die X°-Axe.

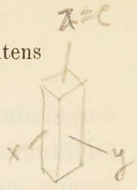
	Ia. $B_2 = 4{,}00$ mm.		Ib. $B_2 = 4{,}05$ mm.	
1. Stellung:	1,64 und 1,41	1,525	1,785 und 1,555	1,67
2. „	1,70 „ 1,75	1,725	1,80 „ 1,66	1,73

Mittel: $\delta_2 = 1{,}625$ 1,70.

$$C_2 = +\,0{,}962 \,.\, 10^{-8}.$$

[1] Er. Mallard, Annales des Mines. 1876. 148—150.

[2] R. Brauns, Die optischen Anomalien der Krystalle. Preisschrift der Jablonowski'schen Gesellsch. 1891. 193. Brauns ist der Ansicht, dass die optischen Anomalien des Beryll durch Spannungen zu erklären seien.



Prisma II, Druckrichtung die Z°-Axe.

Beobachtungsrichtung die X°-Axe. $B_3 = 4{,}00$ mm.

	L. Rd.	M.	R. Rd.	
1. Stellung	2,12	1,90	1,68	1,90
2. „	1,70	1,84	1,96	1,83

Mittel: $\delta_3 = 1{,}865$.

Beobachtungsrichtung die Y°-Axe. $B_3 = 4{,}04$ mm.

L. Rd.	M.	R. Rd.
1,78	1,76 1,81	1,91

Mittel: $\delta_3' = 1{,}82$.

$$C_3 = 1{,}059 \cdot 10^{-8}.$$

Aus den Gleichungen 18′ ergibt sich nun durch Einsetzen dieser Werthe von C_1, C_2, C_3:

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{a_{11} - a_{31}}{v^2} = -\,0{,}192,$$

$$\mathfrak{a}_2 = \frac{a_{12} - a_{31}}{v^2} = -\,0{,}021,$$

$$\mathfrak{a}_3 = \frac{a_{33} - a_{13}}{v^2} = -\,0{,}191.$$

Es ist zu bemerken, dass diese Werthe in Folge der Art, wie sie sich aus C_1, C_2, C_3 berechnen, noch unsicherer sind als die letzteren Grössen; besonders gilt dies von a_2. Indessen kann man doch aus dem verhältnissmässig sehr kleinen Werthe von a_2 schliessen, dass a_{12} und a_{31} beim Beryll sehr wenig verschieden sind; und da man nach der Analogie des Quarzes[1] es als wahrscheinlich annehmen kann, dass auch a_{13} wenig von a_{31} abweicht, so lässt die Gleichheit von a_1 und a_3 vermuthen, dass ferner nahezu $a_{33} = a_{11}$ ist. Es scheint demnach, dass sich der Beryll in seinem piëzooptischen Verhalten den isotropen Körpern, für welche $a_{12} = a_{13} = a_{31}$ und $a_{33} = a_{11}$ sein würde, nähert, d. h. dass die gleichen Dilatationen, in verschiedenen Richtungen hervorgebracht, gleiche Änderungen der bei den Lichtschwingungen wirkenden Kräfte verursachen. Um mit Sicherheit diesen Schluss ziehen zu können, müsste man aber a_{13} und a_{31} selbst, sowie auch noch a_{44} bestimmen. — Über die absolute Grösse der Constanten lässt sich, da nur Differenzen von je zwei

[1] F. Pockels, dies. Jahrb. 1890. I. -2-.

derselben gefunden wurden, nichts aussagen; die Werthe jener Differenzen aber sind $\frac{3}{2}$- bis 2 mal so gross wie die entsprechenden beim Quarz. Das Vorzeichen dieser Differenzen stimmt mit demjenigen beim Quarz überein. Daraus, dass $a_1 - a_2$ und somit auch $(a_{11} - a_{12})$ $(s_{11} - s_{12})$ negativ ist, folgt, dass beim Beryll die Moigno'sche Regel zutreffen muss, nach welcher in negativ einaxigen Krystallen, die durch Druck senkrecht zur Hauptaxe optisch zweiaxig gemacht werden, die Ebene der optischen Axen senkrecht zur Druckrichtung liegt. In der That ist bei einem senkrecht zur Hauptaxe, parallel der Y^0-Axe ausgeübten Drucke p zufolge der Gleichungen 13)

$$\omega_y^2 - \omega_x^2 = -p(a_{11} - a_{12})(s_{11} - s_{12}), \text{ also } \omega_y > \omega_x,$$

und, da ω_z die grösste Hauptlichtgeschwindigkeit bleibt, $\omega_z > \omega_y > \omega_x$, also die Ebene der optischen Axen senkrecht zur Y-Axe. Dieses Verhalten ist auch von Moigno und Soleil [1], Pfaff [2] und Bücking [3] direct beobachtet worden. Letzterer versuchte, indem er den mittelst einer Schraube ausgeübten Druck durch die Zusammenpressung einer Feder annähernd mass, das Gesetz zu ermitteln, nach welchem der Axenwinkel mit dem Drucke wächst. Nach unserer Theorie ergibt sich für den halben Winkel der optischen Axen, welcher durch $\sin \Omega = \sqrt{\frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{\omega_z^2 - \omega_x^2}}$ oder in genügender Näherung durch $\sin \Omega = \sqrt{\frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{\omega_e{}^{0\,2} - \omega_o{}^{0\,2}}}$ bestimmt ist, die Beziehung:

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{-p(a_{11} - a_{12})(s_{11} - s_{12}) \cdot n_m^3}{2(n_o{}^0 - n_e{}^0) \cdot v^2}}$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerthe (gültig für Natriumlicht, aber mit hinreichender Genauigkeit anwendbar für die Beobachtungen in weissem Licht):

$$\sin \Omega = 0{,}001726 \cdot \sqrt{p},$$

wo p der Druck in Grammen pro 1 qmm ist. (Ein Druck von 1 kg pro qmm würde danach einen Axenwinkel von nahezu $6\frac{1}{4}{}^0$ hervorbringen, fast denselben wie beim Quarz.)

[1] Moigno u. Soleil, Compt. rend. **30**. 361. 1850.

[2] Pfaff, Pogg. Ann. **107**. 333. 1859; **108**. 598. 1859.

[3] Bücking, Zeitschrift f. Kryst. **7**. 555. 1883.

Berechnet man aus den von Herrn Bücking beobachteten Axenwinkeln 2V in Luft, den Gesammtdrucken P und dem gepressten Querschnitt q seiner Platten den Ausdruck $k = \frac{\sin V \sqrt{q}}{n_m \sqrt{P}}$, — worin in den Fällen, wo erst bei einem gewissen Druck P_0 Einaxigkeit eintritt, P durch $P - P_0$, und in denjenigen, wo beim Drucke 0 bereits ein Axenwinkel $2V_0$ in der zur Druckrichtung senkrechten Ebene vorhanden ist, sin V durch $\sqrt{\sin^2 V - \sin^2 V_0}$ zu ersetzen ist —, so erhält man Werthe, welche weder in jeder einzelnen, auf eine bestimmte Stelle der Platte bezüglichen Versuchsreihe, noch für verschiedene Stellen der Platte constant sind; erst bei sehr grossen Drucken (Herr Bücking wandte bis zu 50 kg auf 24—28 qmm Querschnitt an) werden die Werthe für jede Stelle einigermaassen constant. Bei sehr kleinem Axenwinkel stimmen die Beobachtungen mit der Theorie nur insofern überein, als die Änderung des Axenwinkels durch gleiche Druckzunahme viel stärker war, als bei grossen Axenwinkeln. Als Beispiel mögen die Resultate zweier Versuchsreihen (No. 3 und 7 bei Herrn Bücking) angeführt werden, deren erste sich auf eine Platte von 24 qmm Querschnitt aus brasilianischem Aquamarin, und deren zweite sich auf eine Platte von 28 qmm Querschnitt aus Aquamarin unbekannten Fundortes bezieht. Die in No. 3 untersuchte Stelle war ursprünglich einaxig, und es wurde beobachtet:

$2V =$	5^0	$7\frac{1}{2}^0$	9^0	10^0	$11\frac{1}{2}^0$	14^0	$15\frac{1}{2}^0$	17^0	$18\frac{1}{2}^0$	$19\frac{1}{2}^0$	21^0	$22\frac{1}{2}^0$
für $P =$	5	7,5	9,5	12	15	19	22,5	26	31	37,5	43,5	50 kg
woraus folgt $k \cdot 10^5 =$	191	234	249	246	250	274	278,5	284	283	271,5	271	270.

Bei der Beobachtungsreihe 7 trat erst für $P_0 = 16 - 20$ kg Einaxigkeit ein, da anfangs ein Axenwinkel von $7\frac{1}{2}^0$ in der zur Druckrichtung parallelen Ebene vorhanden war; es ergab sich

$2V =$	3^0	5^0	$6\frac{1}{2}^0$	$7\frac{1}{2}^0$	9^0	10^0	$11\frac{1}{2}^0$	13^0
für $P - P_0 =$	4,5	9,5	14,5	19,5	22	24,5	28	32 kg
folglich $k \cdot 10^5 =$	141	150	157,5	157	177	186,5	201	212

Aus den übrigen Beobachtungen an der ersten Platte folgen Werthe von k, die zwischen 0,00182 und 0,00326 schwanken, bei der zweiten Platte liegen sie zwischen 0,00141

und 0,00271; im Durchschnitt ergeben sich also grössere Werthe, als der aus meinen Beobachtungen für den Beryll von Nertschinsk berechnete (0,00173). Die grosse Veränderlichkeit von k bei den Messungen von Herrn Bücking dürfte wohl der Beobachtungsmethode zuzuschreiben sein, bei welcher, da die Krystallplatten zwischen Stahlplatten comprimirt wurden, ohne Zweifel ein sehr ungleichmässig vertheilter Druck ausgeübt wurde. Es ist auch sehr leicht möglich, dass sich die Vertheilung des Druckes bei der Steigerung desselben geändert hat, wodurch sich sowohl die Änderung von k mit der Grösse des Druckes, als auch der Umstand erklären würde, dass häufig während der Abnahme des Druckes andere Axenwinkel beobachtet wurden, wie bei gleichen Drucken während der Zunahme. Da Herr Bücking selbst bemerkt, dass er in der Regel diejenigen Stellen der Beobachtung unterworfen hat, „welche dem vollen Druck ausgesetzt waren“ $\left(\text{also in Wirklichkeit einem Drucke} > \frac{P}{q}\right)$, so ist es auch sehr wahrscheinlich, dass die aus seinen Messungen abgeleiteten Werthe k grösstentheils zu gross sind. Wegen der Schwierigkeit, die ungleichmässige Vertheilung des Druckes zu berücksichtigen, scheint mir die Beobachtung im convergenten Lichte überhaupt nicht sehr geeignet zur quantitativen Erforschung der piëzooptischen Erscheinungen.

Schliesslich wollen wir die gefundenen Werthe von a_1, a_2, a_3 noch anwenden zur Berechnung der Änderung der Doppelbrechung des Berylls durch allseitig gleichen Druck und gleichförmige Erwärmung.

Wirkt ein allseitig gleicher Druck p, so ist nach der Elasticitätstheorie

$$x_x = y_y = -(s_{11} + s_{12} + s_{13})p, \quad z_z = -(2s_{13} + s_{33})p, \quad y_z = z_x = x_y = 0.$$

Nach 12) wird daher:

$$B_{11} = B_{22} = \omega_o{}^2 = \omega_{o0}{}^2 - \{(a_{11} + a_{12})(s_{11} + s_{12} + s_{13}) + a_{13}(2s_{13} + s_{33})\}p,$$

$$B_{33} = \omega_e{}^2 = \omega_{e0}{}^2 - \{(2a_{31}(s_{11} + s_{12} + s_{13}) + a_{33}(2s_{13} + s_{33})\}p,$$

$$\frac{\omega_e{}^2 - \omega_o{}^2}{v^2} = \frac{\omega_{e0}{}^2 - \omega_{o0}{}^2}{v^2} + \left\{(a_1 + a_2)(s_{11} + s_{12} + s_{13}) - a_3(2s_{13} + s_{33})\right\}p,$$

woraus sich mit genügender Annäherung ergibt

$$n_o - n_e - (n_o^0 - n_e^0) = \frac{n_m^3}{2}\left\{(a_1 + a_2)(s_{11} + s_{12} + s_{13}) - a_3(2s_{13} + s_{33})\right\}p,$$

und wenn man die Zahlenwerthe der a_i und s_{hk} einsetzt:

$$(n_o - n_e) - (n_o^0 - n_e^0) = + 2{,}07 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

D.K. slight increase

Die Doppelbrechung des Berylls erfährt demnach durch allseitig gleichen Druck eine geringe Zunahme.

Im Falle gleichförmiger Erwärmung um 1^0 C. ist $x_x = y_y = \alpha$, $z_z = \gamma$ zu setzen, wo α und γ die Ausdehnungscoëfficienten senkrecht und parallel zur Hauptaxe bezeichnen. Man erhält daher

$$B_{11} = B_{22} = \omega_o^2 = \omega_o^{0\,2} + (a_{11} + a_{12})\alpha + a_{13}\gamma,$$

$$B_{33} = \omega_e^2 = \omega_e^{0\,2} + 2a_{31}\alpha + a_{33}\gamma,$$

$$\frac{\omega_e^2 - \omega_o^2}{v^2} = \frac{\omega_e^{0\,2} - \omega_o^{0\,2}}{v^2} + \frac{2a_{31} - a_{11} - a_{12}}{v^2}\alpha + \frac{a_{33} - a_{13}}{v^2}\gamma$$

$$= a_3\gamma - (a_1 + a_2)\alpha$$

$$\frac{d(n_o - n_e)}{dt} = (n_o - n_e) - (n_o^0 - n_e^0) = \frac{n_m^3}{2}\left\{a_3\gamma - (a_1 + a_2)\alpha\right\}.$$

Nun ist nach Fizeau

$$\alpha = + 1{,}37 \cdot 10^{-6}, \quad \gamma = - 1{,}06 \cdot 10^{-6};$$

der Beryll hat also die merkwürdige Eigenschaft, sich bei Erwärmung parallel der Hauptaxe erheblich zu contrahiren. Mit diesen Werthen wird

$$\frac{d(n_o - n_e)}{dt} = + 0{,}974 \cdot 10^{-6},$$

es ergibt sich also eine Zunahme der Doppelbrechung mit der Temperatur. Eine solche ist nun in der That beobachtet worden, und zwar beträgt sie nach den sorgfältigen Messungen von Offret[1]: $\frac{dn}{dt} = + 2{,}46 \cdot 10^{-6}$, ist also noch erheblich stärker, als die unter der Annahme, dass eine Erwärmung das optische Verhalten ebenso beeinflusse, wie diejenige mechanische Einwirkung, welche die gleiche Dilatation hervorbringt, berechnete Zunahme. Ist nun auch der Werth dieser letzteren ziemlich ungenau, so ist doch die

[1] Offret, Bull. de la Soc. Franç. de Minéral. 13. 405—697. 1890.

Differenz beider Werthe so gross, dass der Schluss gerechtfertigt erscheint, dass die eben ausgesprochene Annahme beim Beryll unzutreffend ist, wie ich es auch früher für den Quarz nachgewiesen habe.

Göttingen, Min.-petr. Institut d. Universität, October 1891.

Erläuterungen zu den Figuren auf Tafel VI.

Fig. 1. Perspectivische Abbildung des Prisma No. 1 von Ammoniakalaun zur Erläuterung seiner Orientirung gegen die Würfelnormalen X^0, Y^0, Z^0. 2fache Vergrösserung.

„ 2. Dasselbe Prisma auf der Fläche 110 gesehen und combinirt mit einem Quarzkeil, in welchem die optische Axe vertikal und dessen Kante unten liegt, im parallelen polarisirten Licht; Polarisationsebenen der Nicols unter $+ 45^0$ und $- 45^0$ gegen die Vertikale geneigt. Nach einer Photographie mittelst farbenempfindlicher Platte im Natriumlicht; 3fache Vergrösserung (vergl. S. 243).

„ 3. Perspectivische Abbildung des Prisma No. 2 von Ammoniakalaun zur Erläuterung seiner Orientirung gegen die Würfelnormalen X^0, Y^0, Z^0; 2fach vergrössert.

„ 4. Dasselbe Prisma, auf der Fläche $\bar{1}11$ im parallelen polarisirten Lichte betrachtet, combinirt mit einem Gypsblättchen vom Roth 1. Ordnung; nach einer Photographie im weissen Licht, wie die beiden folgenden Figuren. H_1, H_2 sind die Polarisationsrichtungen der schnelleren bezw. langsameren Welle im Gypsblättchen, P und A diejenigen im Polarisator und Analysator; die Linien in den einzelnen Feldern des Krystalls geben die Polarisationsrichtung der langsameren Welle daselbst an (vergl. S. 245).

„ 5. Dasselbe bei anderer Stellung des Gypsblättchens und der Nicols und daher mit anderer Helligkeitsabstufung der Felder.

„ 6. Dasselbe Prisma auf dem anderen Flächenpaar ($\bar{1}10$) gesehen, combinirt mit einem Gypsblättchen, dessen Schwingungsrichtungen horizontal und vertikal liegen. Bezeichnungen wie in Fig. 4. Die punktirte Linie (Z^0) im Felde c gibt die Richtung der in der betrachteten Fläche liegenden Würfelnormale an (vergl. S. 247).

„ 7. Perspectivische Abbildung des Beryll-Prisma I; die Vorderfläche ist senkrecht zur Hauptaxe Z^0; 2fach vergrössert.

„ 8. Dasselbe Prisma, im parallel zu X^0 hindurchgehenden homogenen Lichte zwischen gekreuzten Nicols, deren Polarisationsebenen unter $\pm 45^0$ gegen die Vertikale geneigt sind. Nach einer Photographie im Natriumlicht, wie die Fig. 9, 10 u. 12 (vergl. S. 260).

Fig. 9. Dasselbe Prisma in gleicher Stellung aber combinirt mit einem Quarzkeil, dessen optische Axe vertikal und dessen Kante unten liegt (vergl. S. 260).

„ 10. Dasselbe Prisma im parallel zur Z^0-Axe hindurchgehenden Natrium-Lichte zwischen gekreuzten Nicols (vergl. S. 261).

„ 11. Perspectivische Abbildung des Beryll-Prisma II, dessen Längsrichtung parallel der Hauptaxe Z^0 ist; 2fach vergrössert.

„ 12. Dasselbe auf einer Seitenfläche im parallelen homogenen Lichte zwischen gekreuzten Nicols, deren Hauptschnitte unter $\pm 45^0$ gegen die Vertikale geneigt sind (vergl. S. 260).

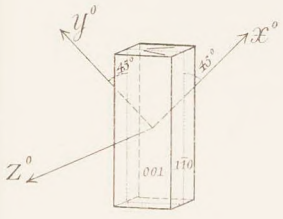


Fig. 1.

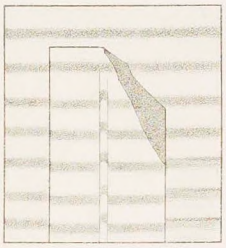


Fig. 2.

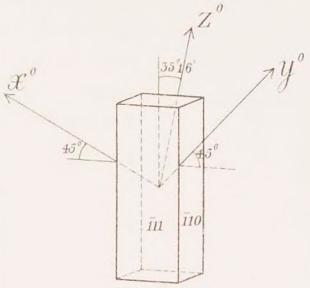


Fig. 3.

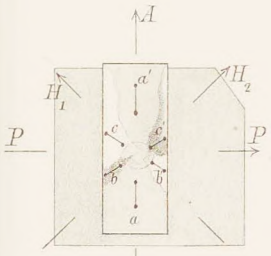


Fig. 4.

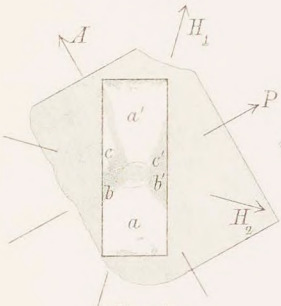


Fig. 5.

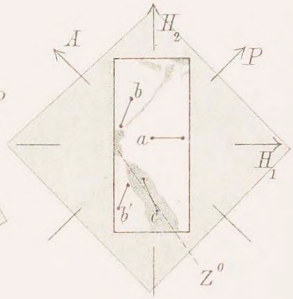


Fig. 6.

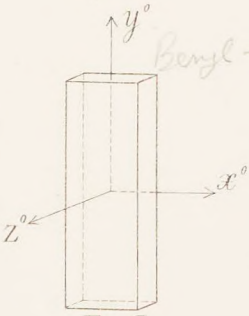


Fig. 7.

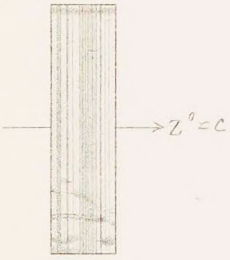


Fig. 8.

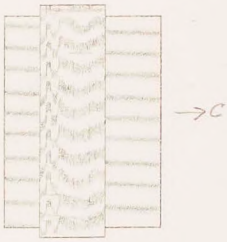


Fig. 9.

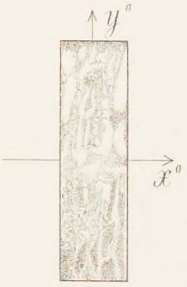


Fig. 10.

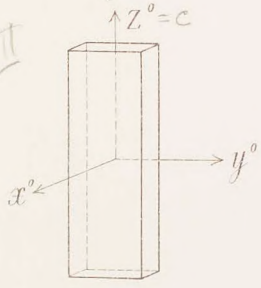


Fig. 11.

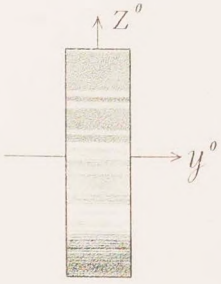


Fig. 12.

Lith. Inst. v. Henry, Bonn.